El sistema de los números reales

National Council of Teachers of Mathematics



11

TEMAS DE MATEMATICAS

11. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

Este cuaderno es uno de los diez nuevos títulos que ha elaborado el National Council of Teachers of Mathematics, los que se suman a la serie de ocho ya aparecidos y reimpresos varias veces en la versión castellana.
Como cada uno de los ocho cuadernos mencionados, el presente, el once en la colección, ha sido escrito para maestros de enseñanza elemental y media, y alumnos de este último ciclo. Comprende la exposición del tema **El sistema de los números reales**, básico en matemáticas. Este tema, como los que trata la serie, ahora de dieciocho, se halla entre los que el maestro necesita dominar para tener una comprensión más cabal de la matemática que usualmente se enseña en esos grados. Cada cuaderno es la introducción a un tema, no un tratado exhaustivo.
Los temas escogidos son especialmente importantes para aquellos maestros que consideran que las experiencias de aprendizaje, transmitidas a los niños del ciclo elemental, deberían empezar por el desarrollo de algunos conceptos unificadores básicos en matemáticas, y para los alumnos de nivel medio y superior que deseen comprender más a fondo los conceptos básicos de la matemática, tratados en cada uno de estos cuadernos.
Es el deseo de los autores y del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) que esta serie de cuadernos pueda auxiliar tanto a los maestros



TEMAS

Colección DE

MATEMATICAS

Traducción:

Federico Velasco Coba
Coordinador del Instituto
de Geofísica
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

Revisión técnica:

Emilio Lluis Riera
Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México

11

El sistema de los números reales

National Council of
Teachers
of Mathematics
U.S.A.



Editorial F. Trillas, S. A.
México, 1970

Título de esta obra en inglés:
Topics in Mathematics for Elementary School Teachers
Booklet number 11. The System of Real Numbers.
Versión autorizada en español de la
primera edición publicada en inglés por

Primera edición en español, septiembre 1970

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industrial Editorial. Reg. núm. 158

Impreso en México

Prólogo

Este cuaderno es uno de las diez nuevas unidades de la serie introducida en 1964 por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM). Como los ocho primeros cuadernos recibieron tan buena acogida —ya se han reimpreso varias veces—, se pensó que una extensión de los temas tratados sería conveniente.

Como los primeros cuadernos (núms. 1 al 8), las nuevas unidades se han escrito pensando más en los profesores de escuelas primarias que en sus alumnos. Cada cuaderno presenta la exposición de un tema básico de las matemáticas. Los temas escogidos están entre aquellos con los que deben estar familiarizados los profesores de primaria para que puedan tratar con verdadera comprensión las matemáticas que comúnmente se enseñan en la escuela primaria. Los cuadernos presentan una introducción al tema que tratan, no un tratamiento exhaustivo de él; el lector interesado puede estudiar estos temas con mayor profundidad en otras publicaciones.

Los temas se han escogido especialmente con el propósito de proporcionar material básico a aquellos profesores que creen que las experiencias de aprendizaje que se proporcionan a los niños en sus primeros años escolares deben incluir una introducción sencilla a algunos de los *conceptos unificadores centrales de la matemática.* Muchos profesores se han encontrado con que su educación profesional no los preparó para la enseñanza de la aritmética de un modo acorde con este punto de vista. Los autores tienen la esperanza, al igual que la NCTM, de que esta nueva serie de cuadernos pueda ayudar eficazmente a estos profesores, y también a otros, y ciertamente a todas aquellas personas interesadas en mejorar la enseñanza de las matemáticas.

Los primeros títulos son los siguientes:

Cuaderno 1: *Conjuntos*
Cuaderno 2: *Números enteros*
Cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros*
Cuaderno 4: *Algoritmos de las operaciones con números enteros*

Cuaderno 5: *Números y sus factores*
Cuaderno 6: *Números racionales*
Cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales*
Cuaderno 8: *Proposiciones numéricas*

Los nuevos títulos son los siguientes:

Cuaderno 9: *El sistema de los enteros*
Cuaderno 10: *El sistema de los números racionales*
Cuaderno 11: *El sistema de los números reales*
Cuaderno 12: *Lógica*
Cuaderno 13: *Gráficas, relaciones y funciones*
Cuaderno 14: *Geometría informal*
Cuaderno 15: *Medida*
Cuaderno 16: *Recopilación, organización e interpretación de datos*
Cuaderno 17: *Sugerencias para la resolución de problemas*
Cuaderno 18: *Simetría, congruencia y semejanza*

Se sugiere que, de ordinario, los cuadernos se lean en el orden de los números que se les han asignado, pues, hasta cierto punto, se ha seguido un proceso en espiral para abordar los distintos temas.

Los nuevos cuadernos comenzaron a elaborarlos, en 1966, los miembros escritores de un grupo de verano. Los autores expresan aquí su más sincero agradecimiento a las siguientes personas, por haber leído parte de los manuscritos, y por sus cambios de impresiones con los autores durante la preparación de estos cuadernos: a Joseph M. Trotter, director de la Escuela de San Luis Rey, y a Bonita Trotter, profesora de la Laurel School, ambos del Distrito Oceánico de la *Union School;* a John M. Hoffman, director de la Sección de Recursos Educativos de la Comunidad del Departamento de Educación del condado de San Diego; y a James E. Inskeep, Jr., profesor de educación en el San Diego State College. Los autores se sienten en deuda, especialmente con Alice C. Beckenbach, por su amplia ayuda en la organización y edición del material para varios de los cuadernos. Expresan también su profundo agradecimiento a Elaine Barth y su selecto grupo de mecanógrafos por su excelente trabajo en la preparación del manuscrito.

El nuevo proyecto, emprendido para proseguir el trabajo del primero, lo inició y apadrinó el Comité de Publicaciones Suplementarias de la NCTM, bajo la presidencia de William Wooton. La NCTM, que proporcionó apoyo financiero, hace ahora público su agradecimiento al grupo de autores de

la presente extensión de la serie *Temas*. A continuación damos los nombres de ellos.

George Arbogast
Manuel P. Berri
Marguerite Brydegaard
Louis F. Cohen
Helen L. Curran
Patricia Davidson
Walter Fleming
Joseph Hashisaki
Lenore S. John
David Johnson
Robert H. Sorgenfrey
J. Dean Swift
William Wooton
Edwin F. Beckenbach, *coordinador*

Indice general

El sistema de los números reales

CUADERNO 11

INTRODUCCIÓN

En el cuaderno 10 de esta serie, se discutió el sistema de los *números racionales*. Este sistema incluía ciertos sistemas numéricos previamente investigados: el sistema de los *números plenos** (cuaderno 2), el sistema de los *números racionales no negativos* (cuadernos 6 y 7), y el sistema de los *enteros* (cuaderno 9). Vamos ahora a estudiar un sistema aún más amplio, el sistema de los *números reales*.

Primero debemos dar una atención especial a algunas características del sistema de los números racionales que serán de particular importancia para el desarrollo de nuestro estudio. Una de ellas es la notación. Los números racionales se denotan en la mayoría de los casos por *fracciones,* tales como 3/2, 5/4 y 6/8. En la fracción 3/2, por ejemplo, el número 3 en el *numerador* y el número 2 es el *denominador*. Otra representación común es la notación *decimal,* en que la posición de un dígito tiene un valor de posición que se usa para hacer presente la idea de que el denominador es una potencia de diez. Escribimos así 0.25 por 25/100 o 1/4. Recuérdese que 2/8, 1/4 y el número decimal 0.25 son todos, nombres para el mismo número racional. (A menudo será conveniente usar simplemente el término "decimal" por el más largo "número decimal".)

En el cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales,* se mencionó un tipo extendido de representación decimal. Es la notación decimal infinita periódica. Aquí, la palabra "infinita", que usaremos repetidamente en este cuaderno, nos recuerda que estos decimales, al contrario de lo que ocurre con 0.25, no tienen un último dígito. Toda esta idea es de tal importancia que la estudiaremos más tarde detalladamente. Por el momento, veamos uno o dos ejemplos que nos harán recordar algunos

* En los cuadernos anteriores, al referirnos al conjunto de números {0, 1, 2, 3, ...}, se empleó el nombre de *números enteros,* por ser este vocablo de uso más general en lengua española. En este cuaderno, y en los subsiguientes, al referirnos a ellos los llamaremos plenos. (Véase el cuaderno 2: *Números enteros;* el cuaderno 3: *Sistemas de numeración para los números enteros,* y el cuaderno 4: *Algoritmos de las operaciones con números enteros.*)

hechos: por ejemplo, entre las notaciones para el número racional denotado por 1/3, la periódica es 0.333 . . ., en donde los puntos suspensivos indican una extensión infinita en la repetición del dígito 3. Otros ejemplos: 1/11 pueden escribirse como 0.090909 . . ., y 2/9 como 0.222. . . .

Otra propiedad importante de los números racionales es muy difícil de formular sin una extensión mayor de nuestro estudio. Es la propiedad de *intercalación,* que nos permite usar números racionales para expresar medidas o cálculos con precisión cada vez mayor. En realidad, todos los cálculos, todas las medidas, todos los usos prácticos de los números se hacen solo con los números racionales.

¿Por qué, entonces, extender el sistema de los números racionales? Debemos llevar a efecto una extensión tal con el fin de evitar un uso oscuro e inexacto del lenguaje y ganar una clara visión de la relación entre los números y la recta numérica. Cuando hayamos efectuado esta extensión, será mucho más fácil hablar acerca de la posibilidad ilimitada de precisión conceptual a la que aludíamos en el párrafo anterior. Vamos a desarrollar una nueva propiedad a la que llamaremos compleción, de la que el sistema de los números racionales carece.

Sin intentar por el momento definir este concepto de compleción, consideremos uno o dos ejemplos. Consideremos primero un "número positivo" que cuando multiplicado por él mismo, es decir, cuando elevado al cuadrado, nos dé 2. Buscamos un número, que representaremos por $\sqrt{2}$ y llamaremos la raíz cuadrada positiva de 2, tal que $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ y que sea mayor que 0. Vemos a veces expresiones inexactas, como 1.414, de $\sqrt{2}$. Pero 1.414 no es una raíz cuadrada de 2; es una raíz cuadrada de 1.999396, como es inmediato ver si multiplicamos 1.414 por 1.414. Más adelante veremos que *no hay ningún número racional que sea la raíz cuadrada positiva de 2.*

¿Nos daremos por vencidos y diremos que no hay ningún número que sea la raíz cuadrada positiva de 2, o inventaremos un nuevo sistema de números en el que 2 tenga una raíz cuadrada positiva entre los números del sistema? En la antigüedad, los griegos optaron por la primera solución y se alejaron de la aritmética porque en este sentido resultaba incompleta. Los matemáticos modernos optaron por la segunda solución.

Sería posible inventar un sistema estrictamente suficiente para proveernos de una raíz cuadrada positiva de 2 y satisfacer las reglas básicas de la aritmética. En tal sistema, resultaría que 3 ya no tenía raíz cuadrada. Tendríamos entonces que comenzar todo de nuevo para remediar esta situación. Realmente, sería posible formular un sistema en el que todo número entero positivo tuviera una raíz cuadrada positiva, pero en el que no existiera

ningún número que representara la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro.

Pero veremos, sin embargo, que es perfectamente posible hacer un trabajo *completo* en el sentido de que todas las razones de cantidades geométricas —todos los valores que pueden ser el resultado de medidas conceptuales— estarán en el sistema construido. En la próxima sección formularemos el procedimiento a seguir. Puede pensarse en él como un proceso en el que "rellenamos la recta numérica".

Al crear los nuevos números, deberemos crear también definiciones para las operaciones aritméticas con ellos —adición, sustracción, multiplicación y división— que preserven las propiedades básicas de estas operaciones cuando se aplican a los números racionales. Queremos que el nuevo sistema incluya a los números racionales no solamente como un subconjunto, sino también como un *subsistema,* en la misma forma que puede considerarse que el sistema de los números racionales incluye al sistema de los enteros. (Véase el cuaderno 10: *El sistema de los números racionales.*) Alcanzaremos esta meta definiendo las operaciones sobre los nuevos números en términos de operaciones sobre los números racionales.

RECTA NUMÉRICA Y DECIMALES INFINITOS

El círculo rodante

Construyamos una recta numérica del siguiente modo. Trazamos una recta horizontal, que suponemos perfectamente derecha y absolutamente inmune a todas las imperfecciones del mundo real. No sufre las irregularidades del papel; no tiene hueco alguno a pesar de los espacios entre las moléculas. Esta recta existe solamente en nuestra imaginación, desde luego, pero el dibujar partes de ella nos ayudará tanto a pensar como a comunicar información.



FIGURA 1

Sobre la recta, escogemos un punto arbitrario y lo marcamos con 0. A la derecha de este punto, escogemos un segundo punto arbitrario y lo marcamos con 1. (Véase la figura 1.) Usando la distancia entre estos dos puntos como una unidad básica, marcamos puntos adicionales a su derecha con 2, 3, ... Reflejamos a continuación todo esto hacia la izquierda como

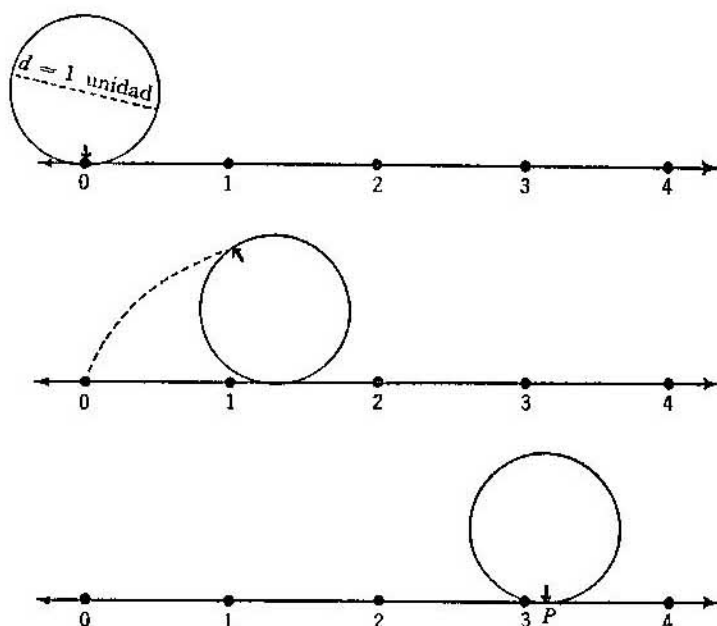


FIGURA 2

si hubiera un espejo en 0, y señalamos las reflexiones con $^-1$, $^-2$, ... (Véase el cuaderno 9: *El sistema de los enteros.*)

Un punto más, *P*, se ha colocado sobre la recta entre los puntos marcados 3 y 4 para ilustrar nuestro siguiente concepto, la idea de *expansión decimal*. El punto se obtuvo, al menos teóricamente, de este modo: hicimos una marca sobre la circunferencia de un círculo cuyo diámetro mide lo mismo que la distancia entre los puntos 0 y 1 marcados sobre la recta. Haciendo coincidir esa marca con el punto 0 de la recta, hacemos rodar el círculo sobre la recta —sin que resbale— hasta que la marca se encuentre de nuevo con la recta. A este punto de contacto se le llamó entonces *P*, como se indica en las figuras 1 y 2.

Supongamos que subdividimos cada uno de los intervalos entre los puntos marcados con enteros en *diez intervalos congruentes más pequeños.* Para proseguir con nuestro ejemplo más directamente, dibujaremos el



FIGURA 3

resultado solamente para el segmento entre los puntos marcados 3 y 4, como aparece en la figura 3. A medida que el trabajo prosiga, continuaremos concentrándonos sobre intervalos que contengan al punto de nuestro ejemplo *P*. Por conveniencia, frases tales como "el punto marcado con 3" las reemplazaremos por las más cortas "el punto 3". Aunque los numerales denominen tanto a un número como a un punto, el contexto nos dirá cuál de los dos sentidos es el que debe entenderse. Esto no dará lugar a confusión; nombres iguales se usan para diferentes tipos de cosas en muchas otras áreas de nuestra experiencia. Consideremos, por ejemplo, la frase "Rosa cortó una rosa".

Denotemos ahora los puntos finales de los intervalos de izquierda a derecha por 3.1, 3.2, y así sucesivamente hasta 3.9. Para que nuestra notación sea consistente, reemplazaremos 3 y 4 por 3.0 y 4.0. Estos puntos marcados con decimales con *un* dígito después del punto decimal se llamarán *puntos marca de la primera etapa.* Los números correspondientes, desde luego, son números racionales. Ahora *P* está entre 3.1 y 3.2 (Véase la figura 4.)

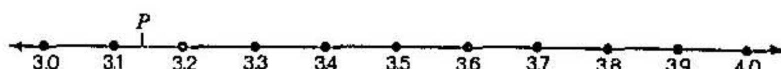


FIGURA 4

Continuemos con el proceso de subdivisión. En cada uno de los pasos sucesivos un dibujo nos mostrará la parte relevante del segmento rectilíneo previo aumentada diez veces. Será como si mirásemos la parte de la recta que contiene a *P* bajo una sucesión de lentes microscópicos en que cada lente fuese diez veces más poderoso que el anterior.



FIGURA 5

En la siguiente etapa vemos al intervalo entre 3.1 y 3.2 con un aumento de diez veces. Lo hemos subdividido, a su vez, en diez intervalos congruentes más pequeños, como nos muestra la figura 5. Añadimos, como antes, dígitos decimales para denominar los puntos de la subdivisión. (Véase la figura 6.) Ahora, sin embargo, hay *dos* dígitos después del punto decimal, y a los puntos así marcados se les llama *puntos marca de la segunda etapa.* Una vez más se corresponden con números racionales. Nótese que los puntos

marca de la primera etapa son también puntos marca de la segunda. Obtienen un nuevo nombre debido a la adición de un 0 a la derecha; pero tampoco esto deja de ser frecuente para un objeto, matemático o no. Hay muchos objetos que tienen más de un nombre. Por ejemplo, papá es el señor García, o Francisco, o el tío Paco, según quien sea la persona que está hablando de él. A P se le ve ahora (fig. 6) entre 3.14 y 3.15.

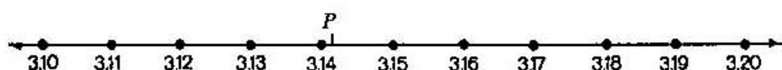


FIGURA 6

Ampliemos este segmento de la segunda etapa. Ahora, no obstante, lo mostraremos sólo después de que hayamos acabado de denominar los *puntos marca de la tercera etapa* apropiados. (Véase la figura 7.) Esta vez la mayor ampliación nos muestra que P está entre 3.141 y 3.142.

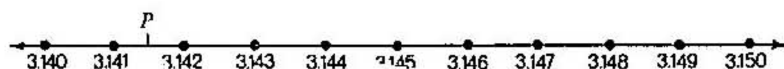


FIGURA 7

Probemos con un nuevo aumento; una vez más ilustramos tan solo el segmento que contiene a P. En la figura 8 tal segmento aparece después que los *puntos marca de la cuarta etapa* se han señalado y denominado. Vemos que P está entre 3.1415 y 3.1416 y muy próximo a este último. Una ampliación más nos mostraría a P entre 3.14159 y 3.14160.

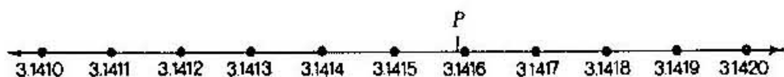


FIGURA 8

Para obtener una visión de conjunto del proceso hasta este momento, combinamos cuatro ampliaciones en una sola representación, la de la figura 9.

Podemos simplificar las descripciones de la situación de P mediante un sencillo convenio. En cualquiera de las etapas, en lugar de describir la localización de un punto como situado en el segmento entre dos puntos marca de esa etapa, nos limitaremos a nombrar el punto marca que se encuentra inmediatamente a la izquierda del punto. (Desde luego, si un punto

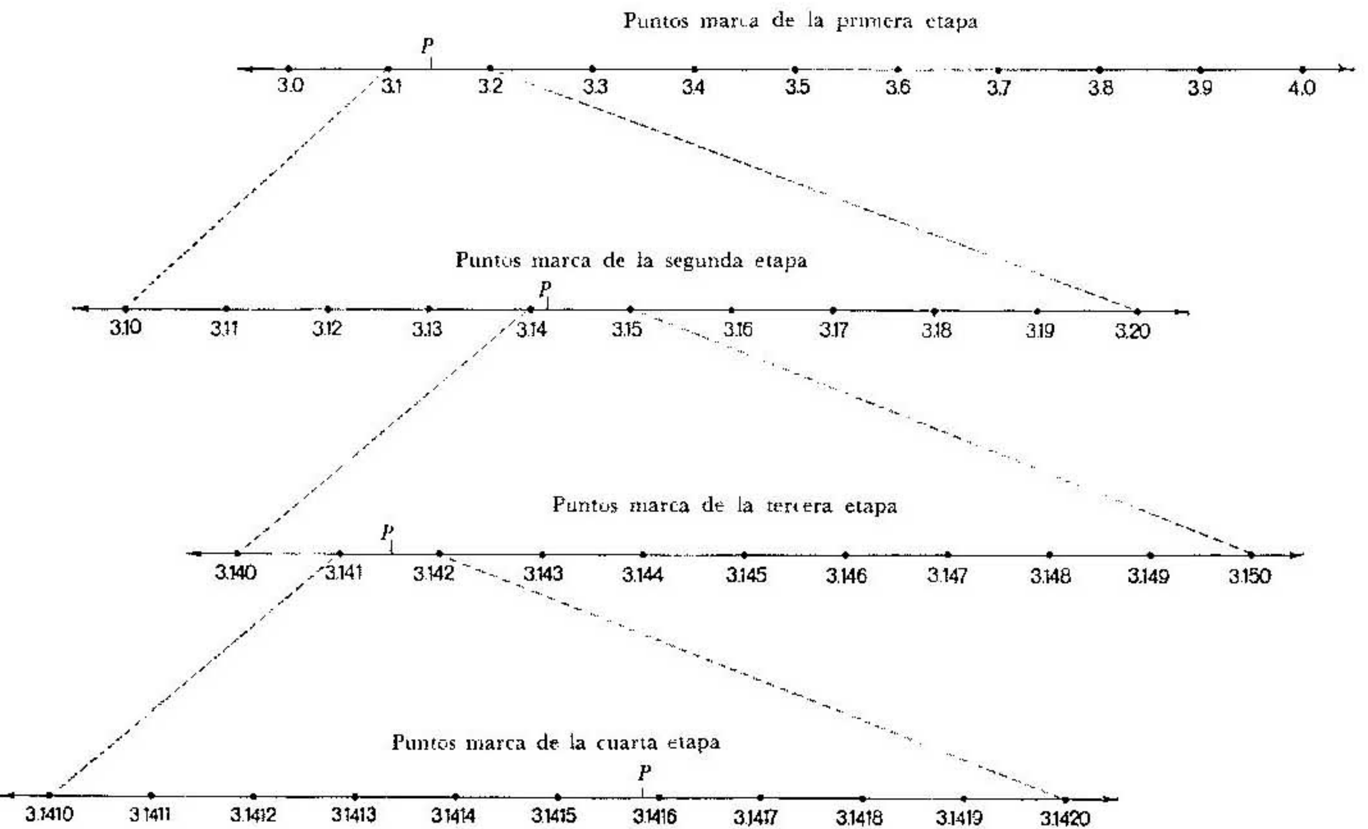

Puntos marca de la primera etapa
P
3.0
3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6
3.7
3.8
3.9
4.0
Puntos marca de la segunda etapa
P
3.10
3.11
3.12
3.13
3.14
3.15
3.16
3.17
3.18
3.19
3.20
Puntos marca de la tercera etapa
P
3.140
3.141
3.142
3.143
3.144
3.145
3.146
3.147
3.148
3.149
3.150
Puntos marca de la cuarta etapa
P
3.1410
3.1411
3.1412
3.1413
3.1414
3.1415
3.1416
3.1417
3.1418
3.1419
3.1420

FIGURA 9

es un punto marca, nombramos ese punto de acuerdo con ello en su etapa apropiada.) Así, *P* vendría indicado por 3.1 en la primera etapa, por 3.14 en la segunda, y así sucesivamente por 3.141, 3.1415 y 3.14159. La forma más común de decir esto es indicar la etapa por el número de dígitos decimales y usar construcciones tales como: "La expansión decimal de *P* con dos dígitos decimales es 3.14", o simplemente "*P* está dado con dos decimales por 3.14".

Recuérdese que este es un experimento imaginario. Estamos haciendo rodar un círculo "perfecto" sobre una recta "perfecta". Si realmente hiciéramos el experimento, nuestra precisión estaría limitada por imperfecciones en el círculo y en la recta, por el resbalamiento del círculo mientras rodaba, y por nuestra incapacidad para marcar y medir con precisión exacta. Ya ahora estamos en, o más allá de, los límites de la construcción de equipo más precisa para las escalas que generalmente usamos. Las normas industriales, por ejemplo, requieren que los pistones y los anillos de las máquinas de precisión se construyan con un margen de error no mayor que un diezmilésimo de pulgada (0.0001 pulg), mientras que nosotros ya estamos hablando de intervalos cuya longitud es una cienmilésima (0.00001) de nuestra unidad original. Afortunadamente, el cálculo matemático no está limitado por consideraciones tan mundanas. Mediante el uso de calculadoras electrónicas se ha llevado nuestro experimento teórico a través de diez mil etapas, trabajando con fórmulas trigonométricas que no necesitan de ninguna recta ni ningún círculo real.

Pero nuestra imaginación no está limitada por el costo o el tiempo requeridos para el cálculo en una computadora moderna. Podemos imaginar que el proceso continúa literalmente por siempre, y un dígito decimal sigue a otro en la designación de *P*. Es este numeral decimal sin límite o infinito el que consideramos como nombre de *P*. Todos los numerales preliminares finitos son simplemente etapas iniciales.

Los números reales

Vamos a considerar otras dos ideas que están relacionadas con el proceso que estamos discutiendo.

La primera idea es ésta: a cada punto marca se le ha dado un numeral decimal. Este decimal, como ya hemos dicho, denota también un *número*. Así, pues, *todo punto marca tiene, asociado a él, un número racional*. Este número especifica la longitud, en términos de nuestra unidad, del segmento limitado por cero y el punto marca. Inventamos ahora un "número", designado por el numeral para *P*, que describe la distancia de 0 a *P*. Nótese

que esto está perfectamente de acuerdo con nuestro uso previo de decimales infinitos. El punto a un tercio de la distancia de 0 a 1 se denotó por 0.333 . . . , y el numeral 0.333 . . . está asociado con el número racional 1/3.

La segunda idea la hemos sugerido ya por implicación. Mientras que nuestra atención estuvo fijada en la parte específica de la recta que contenía a P, fuimos conscientes de la posibilidad de efectuar las subdivisiones en cada etapa sobre la *recta en su totalidad*. En la primera etapa, *todo* intervalo entero está dividido en diez partes. En la segunda, hay cien subdivisiones entre *todo par sucesivo* de enteros, y así sucesivamente. Por ejemplo, en la segunda etapa el punto marca exactamente a la derecha de 1.00 es 1.01; el punto inmediatamente a la izquierda de 2.00 es 1.99. ¿Cuál es el que está inmediatamente a la derecha de 0.50? ¿E inmediatamente a la izquierda? Los puntos 0.51 y 0.49, desde luego.

Debemos prestar una atención particular a aquella parte de la recta a la izquierda de 0, porque quizá no sea todo lo claro que sería de desear decir simplemente que reflejamos el lado de la derecha y usar signos negativos. En la primera etapa, el segmento de $^{-}1.0$ a 0.0 tendrá la apariencia que se muestra en la figura 10.

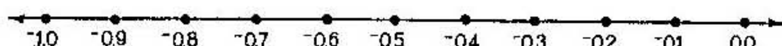


FIGURA 10

Si nuestro círculo hubiera rodado hacia la izquierda, ¿donde habríamos marcado el punto resultante? Entre $^{-}3.1$ y $^{-}3.2$. Llamemos al punto Q en lugar de P, para distinguir entre los dos experimentos. (Véase la figura 11.)



FIGURA 11

¿Cuál es el decimal que denomina a Q en esta etapa? Recuérdese la idea de reflexión. Piénsese en un espejo colocado en 0. La parte "negativa" de la recta es la imagen en el espejo de la parte "positiva". Cuando escogimos 3.1 para representar a P en la primera etapa, escogimos el punto marca entre P y 0. Q es el reflejo de P; y $^{-}3.1$, entre Q y 0, es el reflejo de 3.1. Asociamos por ello Q a $^{-}3.1$.

Consideremos ahora la recta numérica en la figura 10. En la segunda etapa, ¿cuáles son los puntos marca exactamente a la izquierda y a la derecha de ⁻1.00? Son, respectivamente, ⁻1.01 y ⁻0.99, como nos muestra la figura 12.

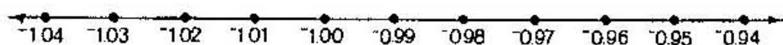


FIGURA 12

Pensemos ahora en la recta en su totalidad cuando pasamos de una etapa a la siguiente. Las subdivisiones aumentan en número; los intervalos se hacen más y más cortos. Nuestra intuición nos sugiere que los intervalos terminan por estrecharse hasta un punto.

Nos resulta muy difícil examinar este concepto rigurosamente con todo rigor lógico, y casi tan difícil pensar acerca de él de un modo intuitivo. Algunas de las causas de nuestras dificultades son las siguientes:

1. *El problema de imaginar el infinito.* Tanto las subdivisiones infinitas como los decimales infinitos están muy lejos de nuestra experiencia cotidiana.

2. *Nuestra utilización de imágenes inexactas.* Hacemos unos trazos con tinta, lápiz o tiza y los llamamos puntos y rectas. Si decimos, por ejemplo, "no importa cuán juntos puedan estar dos puntos, siempre termina por haber un punto marca entre ellos", quizá se nos conteste: "Pero puedo marcar aquí dos puntos tan próximos que se tocan. Nunca podrá hallar un punto entre ellos." La contestación realmente lo que quiere decir es: "si trazo dos *borroncitos* que se tocan, nunca se puede trazar un borroncito entre ellos". Pero los borroncitos no son la misma cosa que los puntos, porque los puntos no tienen dimensión alguna y no se pueden tocar sin ser idénticos.

3. *Dificultades lógicas que se encuentran con los conjuntos infinitos y los procesos infinitos.* Estas dificultades, muy reales, han ocupado a los matemáticos por miles de años. Solo en la última centuria se ha desarrollado un método para el manejo de los conjuntos infinitos y de los procesos infinitos que la mayoría de los matemáticos modernos considera aceptable.

Pero, volvamos a nuestra construcción de los números reales: en cada paso, cada punto es asignado a un punto marca cercano denominado por un numeral decimal. En cada paso sucesivo, los numerales decimales contienen un dígito más. Como subdividimos los intervalos sin límite, asignamos a cada punto su decimal infinito. A su vez, cada uno de los numerales decimales finitos para los puntos marca, denomina a un número racional particular que indica cada vez más exactamente la distancia y dirección

del punto al origen o punto cero. El decimal infinito, entonces, nombra a esta última distancia o "número real".

Para cada punto de la recta numérica, hay un decimal infinito asociado que denomina a un número real. La recíproca de esta proposición que para cada decimal infinito hay un punto a él asociado, es una hipótesis de nuestro desarrollo. En cierta forma esto es exactamente lo que queríamos decir cuando exigíamos que la recta numérica estuviera libre de huecos e imperfecciones.

Lo que queremos es establecer estas correspondencias biunívocas:

Números reales ↔ decimales infinitos ↔ puntos sobre la recta numérica.
(Léase "↔" como "correspondiéndose con".)

Hemos dado razones intuitivas de por qué hay, al menos, un decimal infinito para cada número real y cada punto. Hemos también establecido, por definición, una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos al considerar un número real como expresando la longitud de un segmento, con un signo apropiado adjunto para indicar la dirección a partir del origen. No hemos discutido la posibilidad de que un punto pueda tener más de un decimal infinito asociado a él. La realidad es que esto sucede en algunos casos especiales, y que debemos discutirlos antes de seguir más adelante.

Cuando estábamos asignando puntos marca a los puntos en los intervalos, dijimos que si un punto es un punto marca, entonces se le asigna él mismo. En los otros casos, en cada etapa tomados el punto marca más cercano a la izquierda para puntos en el lado positivo del origen y el punto marca más cercano a la derecha para puntos en el lado negativo del origen.

¿Qué es lo que sucedería si siempre usásemos una sola regla, por ejemplo, la siguiente? "En cada etapa asígnese a cualquier punto sobre el lado positivo del origen el punto marca más cercano a su izquierda; y a cualquier punto sobre el lado negativo asígnesele el punto marca más cercano a su derecha". Esto, desde luego, querría decir que a un punto marca no se le podría ya asignar él mismo.

Es claro que en primer lugar tendríamos que formular una definición especial para 0, que no está *ni* en el lado positivo *ni* en el negativo. Pero sucederían también otras cosas no convenientes. Tomemos, por ejemplo, el punto originalmente marcado 1. ¿Cuál es, en la primera etapa, el punto marca más cercano a su izquierda? Evidentemente, 0.9. ¿Y cuál en la segunda etapa? 0.99. Continuemos el proceso: en la décima etapa el punto márca más cercano a su izquierda es 0.9999999999. Resulta obvio que el decimal infinito resultante para el punto es exactamente "0" seguido de una

sucesión infinita de nueves. Luego 1.000. . y 0.999. . . denominan al mismo punto.

Puede verse esta duplicación de nombres en otro sentido. Sabemos que el punto 1/3 del segmento entre 0 y el 1 tiene el decimal infinito 0.333. . ., una sucesión infinita de treses. Esto implica que el punto 2/3, también del segmento entre 0 y 1, tiene el decimal 0.666 . . ., que puede expresarse como "2 × 0.333. . .". Pero, ¿qué tenemos entonces con el punto 3/3? Tenemos

$$3 \times 0.333\ldots = 0.999\ldots = \frac{3}{3} = 1.000\ldots$$

Una duplicación análoga sucede en *todo* punto marca distinto del cero de cualquier etapa. Por ejemplo, 0.249999. . . denomina el mismo punto que 0.250000. . ., y ⁻1.73219999. . . denomina el mismo punto que . . . ⁻1.7322000. . . .

En nuestras consideraciones vamos a prescindir de todos los decimales infinitos que tienen una cola constituida por una sucesión infinita de nueves. Con ello resultará que desaparecen todas las dificultades de duplicación. Nuestra regla de asignar a los puntos marca ellos mismos se encargan de este problema.

Orden

En nuestra discusión del sistema de los números adicionales en el cuaderno 10, se hizo notar que los números racionales están ordenados; es decir, que en cualquier par de números racionales diferentes, uno de ellos es menor que el otro. Una ordenación de los números reales debe corresponderse con la relación entre los decimales y los puntos sobre la recta numérica. Intentamos precisar esto con las siguientes reglas.

A. Agrupación de los decimales infinitos en tres clases (tricotomía).
   1. Cero: 0.000. . . . Si se desea, puede hacerse anteceder con un signo positivo o negativo; el número denominado no cambia por ello.
   2. Decimales positivos: al menos uno de los dígitos no es cero (por ejemplo, 0.0001000. . .), y el decimal no tiene signo que le preceda o está precedido de un signo positivo.
   3. Decimales negativos: al menos uno de los dígitos es distinto de cero (por ejemplo, ⁻5.000. . .) y el decimal está precedido de un signo negativo.

B. Comparación de números.
   1. Si uno de los decimales que se comparan es el cero.
      a) Cero es *menor* que cualquier número real representado por un decimal positivo.

b) Cero es *mayor* que cualquier número real representado por un decimal negativo.

2. Si los decimales tienen signos opuestos, cualquier número real representado por un decimal negativo es menor que cualquier número real representado por un decimal positivo.
3. Si ambos decimales son positivos, encuéntrese el primer dígito en que las representaciones decimales difieren. El número cuya representación decimal tiene el *menor* dígito en tal punto es el menor:

$$0.457\underline{3}9876\ldots < 0.457\underline{4}1245\ldots\,,$$

$$\underline{0}7.352\ldots < \underline{2}1.352\ldots\,.$$

   Si la diferencia está a la izquierda del punto decimal, podemos aún aplicar la regla estrictamente si recordamos que los ceros pueden llenar las plazas vacías de numerales. Por ejemplo, en el segundo de los ejemplos anteriores, podemos reemplazar 7.352 . . . con 07.352 . . . , para balancear los puntos iniciales de los dos numerales.*
4. Si ambos decimales son negativos, encuéntrese el primer dígito en el que las representaciones difieren. El número cuya representación tiene el *mayor* dígito en tal punto es el número menor:

$${}^-4\underline{4}.372\ldots < {}^-4\underline{3}.372\ldots\,.$$

Densidad

Entre dos puntos cualesquiera con numerales decimales diferentes, hay un punto marca.

No intentaremos dar una prueba formal de la anterior afirmación, sino que nos limitaremos a indicar formas de encontrar tal punto marca. Hay en realidad un número infinito de posibles elecciones.

Consideremos los siguientes casos:

1. Si los números tienen signos opuestos, sabemos que el cero se encuentra entre ellos.
2. Si los números tienen el mismo signo, procuramos "redondear" al que representa el punto más alejado del origen. El redondeo

* Nótese que, originalmente, reservamos la notación con puntos al final de un numeral para implicar la proyección de un grupo numérico establecido y fácilmente perceptible. Estamos ahora tratando con números reales generales que pueden no tener grupo alguno que se repita, pero que no podemos escribir totalmente. Necesitamos, pues, usar la notación con puntos sólo para indicar la continuación de números reales: si no se percibe grupo alguno de números que se repita antes de que los puntos comiencen, supóngase que ninguno existe. Así, en los ejemplos de las reglas 3 y 4 no se implica ningún grupo periódico.

es el proceso de reemplazar con ceros todos los dígitos a la derecha de algún dígito escogido. Podemos hacer esto en cualquier dígito después de que aparece la primera diferencia entre los numerales.

a) $R \leftrightarrow 0.45739876 \ldots$.
$S \leftrightarrow 0.45741245 \ldots$.
Puntos marca entre R y S: 0.45740000 ..., 0.45741000 ..., 0.457412000, ..., etc.

b) $R \leftrightarrow {}^{-}0.0321981 \ldots$.
$S \leftrightarrow {}^{-}0.0322012 \ldots$.
Puntos marca entre R y S: ⁻0.0322000 ..., ⁻0.32201000 ..., etc.

3. Si parece que esto no funciona, ensayamos con el otro punto y otro proceso.

a) $R \leftrightarrow 0.4730000 \ldots$.
$S \leftrightarrow 0.4712000 \ldots$.
Redondear a 0.4730000 ... no resultarán porque ya está redondeado. En vez de ello, ensayamos redondeando a . . . 0.4712000... . El proceso que aquí usamos consiste en aumentar en 1 a un dígito en el numeral que representa el punto más cercano al origen y luego redondearlo.
El redondeo puede hacerse tan pronto como aparezca un dígito diferente que *pueda* ser aumentado, es decir, un dígito que no sea 9.
Puntos marca entre R y S: 0.4720000 ..., 0.4713000 ..., etc.

Nótese cómo todas las sugerencias fallarían si intentásemos encontrar un punto entre los representados por 0.249999... y 0.25000... . No podemos aumentar el primero sin exceder el segundo. Tampoco, a su vez, podemos disminuir 0.25000... y quedarnos arriba de 0.24999... . Esta es otra manera de ver que estos dos decimales denominan al mismo número real. Debe recordarse que hemos prohibido el de la sucesión infinita de nueves.

Podemos poner un número asociado con un punto marca entre cualesquiera dos números reales diferentes. Podemos aproximarnos a cualquier número real tanto como deseemos mediante un número asociado con un punto marca. Es decir, dada una distancia cualquiera, no importa lo pequeña que sea, podemos encontrar un punto marca a una distancia del número real menor que la dada.

Por ejemplo, encontremos un punto marca a menos de 0.00001 unidades del punto P en el ejemplo del círculo rodante. Recuérdese que P estaba situado entre los puntos denotados por 3.14159 y 3.14160. Estos están sola-

mente 0.00001 unidades aparte, y P está *entre* ellos. Por consiguiente, P debe estar a una distancia de cualquiera de ambos menor que 0.00001. Es decir, tanto 3.14159 como 3.14160 son puntos marca situados a una distancia de P menor que 0.00001 unidades.

En la introducción mencionamos dos propiedades del sistema de los números racionales, la de *intercalación* y la de *compleción*. Estas propiedades nos permiten encontrar un punto marca entre dos puntos cualesquiera denominados por decimales diferentes y aproximarnos a cualquier número real tanto como deseemos usando un número asociado a un punto marca. Podemos, por tanto, usar números racionales en general, y números representados por fracciones decimales que terminan en ceros —a las que se llaman decimales con terminación— en particular, como aproximaciones de todos los números reales y de todas las medidas.

En el cuaderno 6: *Números racionales,* se discutió una propiedad análoga de los números racionales: los números racionales eran *densos*. Es decir, entre dos números racionales cualesquiera hay siempre otro número racional. Aquí estamos tratando con una generalización. Entre dos números *reales* cualesquiera hay un número *racional* —en realidad, uno denotado por un decimal con terminación.

El uso matemático es el siguiente. Supongamos que tenemos un conjunto S de números y otro conjunto T que es un subconjunto de S; entonces $T \subset S$, con la propiedad de que dados dos números cualesquiera de S, hay un número de T entre ellos; *entonces T se dice que es denso en S.**

Por ejemplo, los números racionales son densos en sí mismos —entre dos números racionales siempre hay un número racional. Los números racionales son densos en los números reales. (Realmente, los números irracionales también son densos en los números reales.) Los enteros *no* son densos en los números racionales, ya que, por ejemplo, no hay ningún entero entre 1/2 y 2/3. ¿Son los enteros densos en sí mismos? ¿Hay un entero entre 2 y 3? Ciertamente no; luego los enteros no son densos en sí mismos. ¿Son los números con decimales con terminación densos en los números racionales? Sí; es fácil, por ejemplo, encontrar un número con un decimal con terminación entre 0.72000 ... y 0.73000 .... Tal decimal con terminación es, por ejemplo, 0.725000 ....

Es ciertamente una circunstancia feliz que exista esta posibilidad de aproximación, ya que los cálculos directos usando números reales expresados

* Esta definición se reemplaza usualmente en matemática moderna avanzada por: *T es denso en S si, para cada elemento a de S, existe un elemento de T tan cercano como deseemos a a.*

Las dos definiciones no son estrictamente equivalentes, pero la definición dada en el texto se adapta mejor a nuestra discusión de la aproximación, puesto que queremos subrayar la posibilidad de elección incluida.

en su forma decimal infinita son generalmente imposibles. Si los decimales tiene una forma especial, entonces la operación puede a menudo efectuarse. Ya hemos escrito,

$$3 \times 0.3333\ldots = 0.999\ldots,$$

pero el segundo miembro es una forma prohibida; luego, en la notación permitida, tenemos

$$3 \times 0.3333\ldots = 1.000\ldots.$$

También podemos escribir ecuaciones como

$$0.333\ldots - 0.111\ldots = 0.222\ldots;$$

pero es necesario reconocer que esta es una forma bastante incómoda de escribir $1/3 - 1/9 = 2/9$, como podemos comprobar expandiendo las fracciones en decimales por el algoritmo de la división.

GRUPO DE EJERCICIOS 1

1. En la tercera etapa, de acuerdo a como ésta se definió en las páginas 16-18 del texto, nómbrese el punto marca que está :
   a) inmediatamente a la izquierda de 1.000;
   b) inmediatamente a la derecha de $^-1.000$.
2. Encuéntrese un punto marca entre los puntos denominados por ... $^-0.20134\ldots$ y $^-0.20245\ldots$.
3. Colóquense los siguientes números reales en orden creciente: $^-0.01234\ldots$, $^-0.1234\ldots$, $1.234\ldots$, $^-4.3210\ldots$, $12.345\ldots$, $^-100.00\ldots$.
4. Reemplácense las siguientes expresiones decimales por la forma decimal correcta —es decir, sin la sucesión infinita de nueves— que designa el mismo valor:
   a) 0.20999..
   b) $^-1.12999\ldots$
   c) 2.134999...

NÚMEROS RACIONALES Y DECIMALES PERIÓDICOS

Decimales periódicos

En el cuaderno 7: *Sistemas de numeración para los números racionales*, se estableció una conexión entre los números racionales y los decimales periódicos. Vamos a tratar ahora este mismo tema una vez más desde un punto de vista ligeramente diferente. Deseamos hacer ver que el conjunto

de los números racionales está identificado con un conjunto muy particular del conjunto de los números reales: a saber, con el conjunto de los números reales para los que los decimales tienen un grupo de numerales o periodo que se repite indefinidamente. He aquí unos cuantos decimales periódicos:

$$0.333\ldots$$
$$20.202020\ldots$$
$$^{-}5.73012012012\ldots$$
$$13.25000\ldots$$

En todos los casos, después de cierta dosis de duda inicial, que puede extenderse a la derecha del punto decimal, se presenta un grupo de dígitos que continúa indefinidamente, es decir, nos encontramos con un número fijo de dígitos consecutivos que se repiten en el mismo orden.

En el primer ejemplo, el periodo comienza en el punto decimal y consta de un solo dígito, el 3.

En el segundo, el periodo comienza dos dígitos a la izquierda del punto decimal y consta de dos dígitos consecutivos, 20.

En el tercero, el periodo no comienza sino hasta el tercer dígito a la derecha del punto decimal. Consta de tres dígitos, 012.

El cuarto periodo, también comienza tres dígitos a la derecha del punto decimal, pero consta de un solo dígito, el 0.

Es con frecuencia conveniente usar una rayita (testa) sobre la parte superior del periodo en lugar de los puntos para indicar la repetición. Como hemos dicho, la testa se coloca sobre los dígitos de un periodo. La testa nunca se coloca a la izquierda del punto decimal. De esta manera, los cuatro ejemplos anteriores se reescribirían

$$0.\overline{3}$$
$$20.\overline{20}$$
$$^{-}5.73\overline{012}$$
$$13.25\overline{0}$$

Algunas veces podemos querer poner las testa lo más a la izquierda que se pueda. Por ejemplo, en las ecuaciones $1/11 = 0.\overline{09}$ y $10/11 = 0.\overline{90}$ podría ser conveniente para propósitos de cálculo usar las testas para mostrar que los periodos eran los mismos:

$$\frac{1}{11} = 0.\overline{09}, \qquad \frac{10}{11} = 0.9\overline{09};$$

o bien

$$\frac{1}{11} = 0.0\overline{90}, \qquad \frac{10}{11} = 0.\overline{90}.$$

Queremos sentar dos puntos básicos en esta sección:

1. Todo decimal periódico es una expresión decimal de un número racional.
2. Todo número racional tiene una expansión decimal periódica.

El lector debe tener cuidado al analizar la diferencia entre las dos proposiciones. Es concebible que la una fuera cierta y la otra falsa, como es el caso con las proposiciones: "todo gato es un mamífero" y "todo mamífero es un gato".

Vemos, sin embargo, que las proposiciones 1 y 2 son ambas ciertas; juntas establecen el resultado de que los decimales periódicos y las fracciones son simplemente representaciones diferentes de los mismos números decimales.

Cómo construir una fracción a partir de un decimal periódico

Para convencernos de que la proposición 1 es cierta, necesitamos una regla que nos muestre cómo encontrar una fracción equivalente a un decimal periódico dado cualquiera. Escogeremos como primer ejemplo de la prescripción al decimal $0.272727\cdots$, que podemos expresar como $0.\overline{27}$.

El método se basa en el efecto que resulta de multiplicar por una potencia de diez a un número que está representado por un decimal. Comencemos con el número $a = 0.272727$, que es como el de nuestro ejemplo, salvo que termina después del sexto dígito:

$$\begin{aligned} a &= 0.272727 \\ 10 \times a &= 2.72727 \\ 100 \times a &= 27.2727 \\ 1\,000 \times a &= 272.727 \\ 10\,000 \times a &= 2\,727.27 \end{aligned}$$

El efecto de cada una de las sucesivas multiplicaciones por una potencia más alta de diez es el de mover el punto decimal un lugar a la derecha en la representación decimal.

Consideremos ahora nuestro ejemplo sin terminación:

$$\begin{aligned} b &= 0.272727\cdots = 0.\overline{27}. \\ 10 \times b &= 2.727272\cdots = 2.\overline{72} = 2.7\overline{27}. \\ 100 \times b &= 27.272727\cdots = 27.\overline{27} \end{aligned}$$

Si restamos el valor original de b de $100 \times b$, tenemos

$$\begin{array}{r} 100 \times b \\ -\ b \\ \hline 99 \times b \end{array} \qquad \text{o, en este caso} \qquad \begin{array}{r} 27.272727\ldots \\ -0.272727\ldots \\ \hline 27.000000\ldots \end{array};$$

de donde

$$99 \times b = 27, \quad \text{o} \quad b = \frac{27}{99} = \frac{3 \times 9}{11 \times 9} = \frac{3}{11}.$$

Nótese como difiere b de a. A medida que multiplicamos a por potencias sucesivas de diez, el último dígito se mueve a la izquierda al formar cada resultado decimal. Así, para b no hay ningún *último* dígito; los decimales para b, $10 \times b$ y $100 \times b$ repiten sus periodos indefinidamente.

¿Por qué escogimos 100 como uno de los multiplicadores? Porque trajo el periodo que se repite alineado con el original. Si hubiésemos usado

$$10 \times b = 2.\overline{72} = 2.7\overline{27},$$

el periodo no habría estado alineado con $0.\overline{27}$. Desde luego, 10 000 habría trabajado tan bien como 100:

$$10\,000 \times b = 2\,727.\overline{27}$$

$$\begin{array}{r} 10\,000 \times b \\ -b \\ \hline 9\,999 \times b \end{array} \qquad \text{o, en este caso} \qquad \begin{array}{r} 2\,727.\overline{27} \\ -0.\overline{27} \\ \hline 2\,727.\overline{00} \end{array}$$

Luego

$$9\,999 \times b = 2\,727.$$

De manera que

$$b = \frac{2\,727}{9\,999} = \frac{11 \times 909}{3 \times 909} = \frac{3}{11}.$$

¿Mas para qué trabajar más de lo necesario? Escogemos el menor de los multiplicadores que haga el trabajo.

Probemos con otro ejemplo: $0.\overline{148} = 0.148148\ldots$. Esta vez necesitamos una traslación de tres lugares. Multiplicamos, por tanto, por 1 000:

$$1\,000 \times 0.\overline{148} = 148.\overline{148} \qquad \text{(¿por qué?)}$$

restemos el original

$$\begin{array}{r} 148.\overline{148} \\ -0.\overline{148} \\ \hline 148.\overline{0} \end{array}$$

Teníamos 1 000 veces el número original y sustrajimos el número original; lo que nos queda es 999 veces el original y es igual a 148. De donde el número original tiene el valor

$$\frac{148}{999} = \frac{4 \times 37}{27 \times 37} = \frac{4}{27}.$$

He aquí un procedimiento general para efectuar este programa:

1. Encuéntrese la longitud del periodo; es decir, el número de dígitos en el periodo.
2. Multiplíquese (el decimal) por la potencia de diez que llevará todo un periodo hacia la izquierda.
3. Réstese el decimal original.
4. Fórmese una fracción del resultado.
5. Calcúlese qué múltiplo del valor original resultó de los pasos 2 y 3.
6. Divídase entre el resultado del paso 5. El resultado de la división es una fracción cuyo valor es el mismo que el del decimal original.
7. Simplifíquese la fracción.

Como ejemplo final, ilustraremos el método en un decimal cuyo periodo tarda en fijarse. Tomemos

$$0.4135135\ldots = 0.4\overline{135}$$

Necesitaremos un poco más trabajo, a partir del paso 4, del que fue necesario en los anteriores ejemplos.

1. Longitud del periodo: $0.4\overline{135}$ (tres dígitos)
2. Multiplíquese por 1 000: $413.\overline{513} = 413.5\overline{135}$.
   (Quizá sea más fácil ver esto sin las testas
   $1\,000 \times 0.4135135135\ldots = 413.513513513\ldots = 413.5\overline{135}$.)
3. Restemos
$$\begin{array}{rcr} 413.5\overline{135} & = & 1\,000 \times n \\ -0.4\overline{135} & = & -1 \times n \\ \hline 413.1\overline{0} & = & 999 \times n \end{array}$$
4. Hagamos una fracción $413.1 = \dfrac{4\,131}{10}$.
5. Encuéntrese el múltiplo $1\,000 - 1 = 999$.
6. Divídase $\dfrac{4\,131}{10} \div 999 = \dfrac{4\,131}{9\,990} = n$.
7. Simplifíquese $n = \dfrac{4\,131}{9\,990} = \dfrac{153 \times 27}{390 \times 27} = \dfrac{153}{370}$.

El proceso siempre funcionará, porque en el paso 3 produce un decimal con terminación que puede convertirse en una fracción en el paso 4.

Cómo construir un decimal periódico a partir de una fracción

Para encontrar una expresión decimal para un número racional, cuando se conoce su nombre fraccionario, usamos el algoritmo de la división. Necesitamos ver por qué el decimal resultante es forzosamente un decimal periódico. Esto se debe esencialmente a la naturaleza repetitiva del propio algoritmo. Al efectuar los cálculos nos encontraremos finalmente repitiendo los siguientes tres pasos una y otra vez:

1. Bajando un cero.
2. Dividiendo entre el denominador de la fracción original.
3. Obteniendo un nuevo residuo.

Pero, ¿cuántos nuevos residuos *diferentes* se pueden obtener? Ensayemos con un ejemplo, teniendo especial cuidado en seguir las huellas de los residuos a medida que se producen, como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1. $12/7 = 1.\overline{714285}$.

```
        7.71428571
  7 | 12.00000000                 Residuo
       7
     ---------
     | 50                           5
     | 49
     |   10                         1
     |    7
          30                        3
          28
           20                       2
           14
            60                      6
            56
             40                     4
             35
            ---------
            | 50                    5
            | 49
            |   10                  1
            |    7
                 3                  3
```

Después de seis pasos del algoritmo, el residuo 5 se repite. Tan pronto como aparece de nuevo, todo el cálculo se repite porque cada conjunto de tres pasos es exactamente el mismo cuando los residuos son los mismos. Los

bloques marcados por las rectas de rayitas son idénticos y se presentarán una vez tras otra. Por tanto,

$$\frac{12}{7} = 1.\overline{714285}.$$

Ahora bien, ¿cómo sabemos que algún resto se tiene que repetir? Esto ha de ser así porque el número de restos posibles es limitado.

Si se aparece un residuo cero, el decimal termina; es decir, repite un bloque de un dígito que sólo contiene al cero.

Si no se presenta un residuo cero, el rango de restos posibles va desde 1 a uno menos que el divisor, inclusive. (En nuestro ejemplo, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 eran los residuos posibles.) En cuanto hayan aparecido todas las posibilidades, alguna se ha de repetir.

Desde luego, no todos los residuos posibles han de aparecer; podemos llegar a una repetición mucho antes de que todas las posibilidades se hayan agotado.

Ejemplo 2. $23/101 = 0.\overline{2277}.$

```
          0.22772
   101 | 23.00000                  Residuo
          20 2
           2 80                       28
           2 02
             780                      78
             707
              730                     73
              707
               230                    23
               202
                28                    28
```

En el ejemplo 2, solamente cuatro de los cien posibles residuos distintos de cero aparecen en alguna ocasión. En realidad, como los tres pasos mencionados en el algoritmo comienzan en seguida, ya que solamente 0 es lo que se baja en este caso, el problema se repite tan pronto como obtenemos un residuo igual a 23. El problema original era el de dividir 23 entre 101, y cuando 23 aparece como un residuo, esta es de nuevo la situación. Así pues, los dígitos en la respuesta comienzan a repetir el periodo establecido en este punto.

Cualquiera que sea el modo; más pronto o más tarde tiene que ocurrir la repetición de residuos; y entonces hemos acabado un periodo y otro comienza.

GRUPO DE EJERCICIOS 2

1. Expándanse como decimales periódicos:

   a) $\frac{2}{13}$ *b*) $\frac{5}{37}$ *c*) $\frac{14}{35}$ *d*) $\frac{4}{13}$

2. Encuéntrese una fracción (en la forma más simple) equivalente a

   a) 0.202020... *b*) $1.\overline{236}$ *c*) $0.\overline{384615}$ *d*) $0.\overline{12345}$

3. Escríbanse los decimales periódicos para 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7 y 6/7. Muéstrese que si se elige un punto inicial adecuado, siempre aparece el mismo periodo.
4. Muéstrese, por el método desarrollado en esta sección, que 0.999... = = 1 000.

NÚMEROS IRRACIONALES

Raíz cuadrada positiva de 2

Los números reales cuyas expansiones decimales no tienen la forma de un periodo indefinidamente repetido se llaman "números irracionales". Es fácil encontrar los decimales para tantos números irracionales como deseemos. Todo lo que tenemos que hacer es evitar periodos que se repitan una y otra vez. Las pautas para su construcción están muy bien siempre que no haya periodos que se repitan indefinidamente. Por ejemplo, un número irracional está representado por el decimal 0.101001000100001 ···, donde se va poniendo un 0 adicional en cada bloque de ceros entre los unos sucesivos. ¿Puede encontrar el lector alguna pauta en el siguiente decimal?

0.123456789101112131415161718192021 ...

(Cuando se llega a ...1011, se puede decir "diez, once" o "uno, cero, uno, uno".)

Aunque estos números son interesantes, es natural preguntar si existen o no algunos números irracionales de uso más común. Se nos presentan aquí complicaciones. En la introducción mencionábamos a $\sqrt{2}$. ¿Cómo dígitos, en lugar de miles, antes de que comenzaran las repeticiones. Nunca mente miles de dígitos decimales de su numeral, y podemos ver que no aparece ningún periodo que se repita. Pero quizá $\sqrt{2}$ sea un número racional cuya fracción más simple tiene un numerador muy grande y un denominador también muy grande. Pudiera ser que se requirieran millones de

dígitos, en lugar de miles, antes de que comenzaran las repeticiones. Nunca podemos *probar* que el número es irracional mirando los dígitos, no importa cuántos de ellos hayamos obtenido.

Ciertamente, la historia del problema es muy interesante. Los pitagóricos de la Grecia antigua querían obtener una expresión para la longitud de una diagonal de un cuadrado en función de la longitud de uno de sus lados. Buscaban la razón entre la longitud de la diagonal y la longitud de un lado y esperaban calcularla como la razón de dos números naturales. Es esta idea de razón la que conduce al uso del término "racional" en el sentido de "que tiene una razón".

Los pitagóricos sabían que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud del lado más largo (la hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados más cortos (los catetos). El cuadrado de un número es el producto que resulta de multiplicar al número por él mismo. Se usa el índice 2 para indicar que un número está elevado al cuadrado; por ejemplo, 3^2 significa 3×3, es decir, 9. Para un triángulo rectángulo con lados que miden 3 unidades, 4 unidades y 5 unidades, como en la figura 13, tenemos la ecuación $3^2 + 4^2 = 5^2$; es decir, $9 + 16 = 25$.

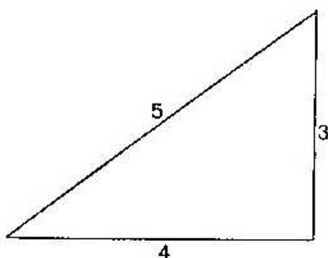


FIGURA 13

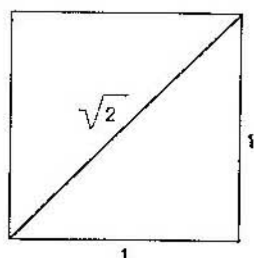


FIGURA 14

Ahora bien, si cada lado de un cuadrado mide una unidad, entonces el cuadrado de la longitud de la diagonal es $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Por tanto, la longitud de la diagonal es $\sqrt{2}$, tal como se indica en la figura 14, ya que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Los pitagóricos querían escribir $\sqrt{2}$ como una razón entre enteros, es decir, como una "fracción". Para entender lo que sigue, necesitamos recordar algunos hechos:

A. Todos los números plenos son o pares o impares. Ningún número es a la vez par e impar. (Los números plenos pares son 0, 2, 4, 6, $\cdots$; los impares son 1, 3, 5, 7. $\cdots$.)

B. Cualquier número pleno par puede escribirse como el doble de otro número pleno. Por ejemplo,

$$10 = 2 \times 5,$$

$$12 = 2 \times 6.$$

Cualquier número que es dos veces un número pleno es par.

C. El cuadrado de un número par es par. El cuadrado de un número impar es impar. Ensáyese con algunos ejemplos para convencerse.

D. Cualquier fracción es equivalente a la fracción cambiada a su forma más simple, es decir, la forma cuyo numerador y denominador tienen 1 como su máximo común denominador. Por ejemplo, 30/42 es equivalen a 5/7, que está en la forma más simple.

E. Si una fracción está en la forma más simple, entonces su numerador y su denominador no son, ambos, pares. Puesto que, entonces, de acuerdo con la proposición B, podríamos dividir el numerador y el denominador por 2. Al menos uno de ellos es impar.

Intentemos ahora escribir $\sqrt{2}$ como una fracción. Esta fracción —si es que hay alguna— puede estar en su forma más simple de acuerdo con lo que nos dice la proposición D. El denominador es un número natural, q, y el numerador un número pleno, p.

Tenemos entonces

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2},$$

o sea

$$\frac{p}{q} \times \frac{p}{q} = \sqrt{2} \times \sqrt{2},$$

es decir

$$\frac{p^2}{q^2} = 2, \quad \text{por la definición de } \sqrt{2}.$$

Multiplicando ahora ambos miembros de la ecuación por q^2, tenemos

$$\frac{p^2}{q^2} \times q^2 = 2 \times q^2,$$

es decir

$$p^2 = 2 \times q^2.$$

Luego p^2 es par, de acuerdo con la proposición B, y ello según la proposición C, implica que p es par.

Luego q es impar, de acuerdo con la proposición E. Ahora bien, usando el resultado de que p es par y aplicando de nuevo la proposición B, vemos

que hay algún número pleno r tal que $p = 2 \times r$. Por tanto, podemos sustituir a p por $2 \times r$ en la ecuación $p^2 = 2 \times q^2$, de donde

$$(2 \times r)^2 = 2 \times q^2, \quad \text{o sea,} \quad (2 \times r) \times (2 \times r) = 2 \times q^2.$$

Ahora, las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación nos permiten reagrupar la expresión del primer miembro como sigue

$$(2 \times 2) \times (r \times r) = 2 \times q^2,$$

o sea

$$4 \times r^2 = 2 \times q^2,$$

de donde, al dividir ambos miembros por 2,

$$2 \times r^2 = q^2.$$

Y ahora las proposiciones B y C implican que q^2 y q son pares.

De donde q es a la vez par e impar. Pero, de acuerdo con la proposición A, esto es imposible; q no existe y no hay fracción alguna para $\sqrt{2}$. Esto completa la prueba —pero si el lector la ha encontrado difícil, entonces quizá deba leerla de nuevo desde la página 34 para apreciar todas sus sutilezas.*

Este descubrimiento asombró mucho a los griegos. Había longitudes sin un número aceptable con qué designarlas. Enunciaron el hecho diciendo: "La diagonal de un cuadrado y su lado son inconmensurables." Es decir, no pueden ser medidas una en función de la otra en el sentido de que si marcamos repetidamente diagonales y también lados sobre una misma recta, comenzando desde un mismo punto, los puntos extremos nunca coinciden. La longitud de siete lados es *cercana* a la de cinco diagonales, pero las dos longitudes no son *iguales.* (Si la longitud de siete lados fuera igual a la lonlitud de cinco diagonales, entonces un quinto de la longitud de un lado o un séptimo de la longitud de una diagonal serían una medida común.) A partir de este momento, los griegos volvieron su atención exclusivamente a la geometría, ya que la aritmética había probado ser incompleta. El resultado fue que partes de la matemática dependientes de los cálculos aritméticos —el álgebra y la trigonometría, por ejemplo— quedaron desatendidas por siglos.

Actualmente no nos altera tanto esta prueba como alteró a Pitágoras. (La leyenda dice que hizo jurar a sus colaboradores que guardarían el secreto y que hizo un sacrificio de cien bueyes.) Sabemos cómo aproximarnos a $\sqrt{2}$ con números representados por decimales finitos. Una forma de hacer esto es la de hacer aproximaciones sucesivas por "enmarcación".

* Véase también el artículo de Edwin F. Beckenbach, "Geometric Proofs of the Irrationality of $\sqrt{2}$", *Arithmetic Teacher,* XV (1968), 244-250.

Para enmarcar, comenzamos por obtener el valor entre enteros sucesivos; 1 es demasiado pequeño, puesto que $1 \times 1 = 1$, que es menor que 2; 2 es demasiado grande, puesto que $2 \times 2 = 4$, que es mayor que 2. Sabemos ahora que $\sqrt{2}$ está entre 1 y 2 y, por tanto, que el decimal para $\sqrt{2}$ comienza con 1.

Ensayamos a continuación con décimas. Multiplicamos sucesivamente por sí mismos, 1.1, 1.2, etc., hasta que obtenemos un producto que es mayor que 2:

$1.1 \times 1.1 = 1.21$ (demasiado pequeño);

$1.2 \times 1.2 = 1.44$ (demasiado pequeño);

$1.3 \times 1.3 = 1.69$ (demasiado pequeño);

$1.4 \times 1.4 = 1.96$ (demasiado pequeño, pero próximo);

$1.5 \times 1.5 = 2.25$ (demasiado grande).

De donde el decimal para $\sqrt{2}$ comienza con 1.4.

A continuación pasamos a las centésimas y comenzamos con 1.41;

$1.41 \times 1.41 = 1.9881$ (demasiado pequeño);

$1.42 \times 1.42 = 2.0164$ (demasiado grande).

Sabemos ahora que la expansión comienza con 1.41.

El siguiente paso sería llegar a los dígitos de la tercera etapa. Si ensayamos con 1.411, 1.412, 1.413, 1.414 y 1.415, encontramos que 1.415 es el primero que es demasiado grande; de donde sabemos que $\sqrt{2}$ tiene una aproximación decimal en esta etapa de 1.414. El proceso puede obviamente continuarse en tanto dure nuestro interés o nuestra paciencia.

Otros números irracionales

Hay muchos otros números irracionales interesantes; por ejemplo $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$. En general, cualquier raíz cuadrada de un número natural es o un número natural o un número irracional.

Hay un modo interesante de ver cuáles son las longitudes de segmentos correspondientes a estas raíces cuadradas. Comiéncese con dos segmentos perpendiculares AB y BC, cada uno de longitud 1. Dibújese el segmento AC (fig. 15). Hemos visto que este segmento tiene una longitud igual a $\sqrt{2}$. Comenzando en C como se muestra, trácese un segmento de longitud 1 perpendicular al segmento de longitud $\sqrt{2}$ y únase su punto extremo D con

el punto extremo A. ¿Cuál es la longitud del nuevo segmento AD? su cuadrado es $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$. Continúese de esta manera. Cada nuevo segmento desde A tendrá una longitud igual a la raíz cuadrada del siguiente número natural. Se irá formando una espiral.

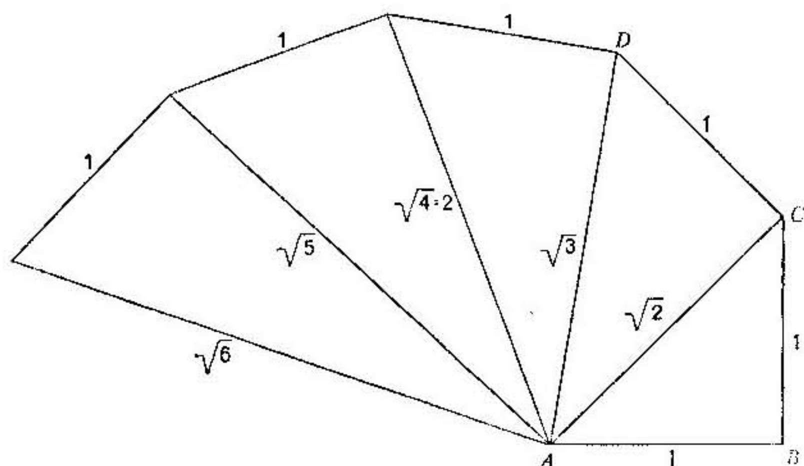


FIGURA 15

Pruebas análogas a la dada para demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional funcionarán para $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc; pero hay otros métodos, y más generales, para mostrar la iracionalidad de estos números. Además, podemos definir y usar raíces más altas; por ejemplo, la raíz cúbica positiva de 2, que se escribe $\sqrt[3]{2}$, es el número real positivo que tiene la propiedad de que $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = 2$. De nuevo, este es un irracional, como lo son la mayoría de los otros números de esta forma (excepto, desde luego, casos particulares como $\sqrt[3]{8}$ que es igual a 2, ya que $2 \times 2 \times 2 = 8$.)

Un número irracional particularmente interesante es π, la razón de la cincunferencia de un círculo a la longitud de su diámetro. Que esta razón es una constante universal, la misma para todos los círculos independiente de su tamaño, parece que es cuestión conocida desde tiempos muy antiguos. La aproximación más antigua de π es 3. Aparece en la Biblia, donde se dice que Salomón, decorando el templo de Jerusalén, proveyó un gran vaso de bronce que medía "nueve codos a su alrededor y tres codos a su través". Esta aproximación también la usaron los egipcios y los babilonios.

No está muy claro cuándo comenzó a usarse la aproximación —tan comúnmente usada hoy por los niños de nuestras escuelas— de 22/7.

Es seguro que se conocía en el Renacimiento. Entretanto, Arquímedes había mostrado, mediante una prueba geométrica, cómo obtener valores tan próximos como se desee aproximándonos a la circunferencia con polígonos.

En 1761, el matemático alemán Lambert probó, por primera vez, que es irracional. No se conoce ninguna demostración sencilla. Para los cálculos prácticos, los valores 3.1416 y 3.14159 son, por lo común, suficientemente exactos; pero la mayoría de los libros de tablas matemáticas enumeran el valor de, al menos, diez dígitos después del punto decimal —un total de once dígitos— para los cálculos que requieren una precisión especial. He aquí los veinticinco primeros dígitos del decimal para π:

$$3.1415926535897932384626 43.$$

El cálculo de π con una precisión cada vez mayor fue un pasatiempo matemático favorito durante muchos años. El advenimiento de las calculadoras electrónicas le puso fin, y una expansión de diez mil dígitos se hizo simplemente como una especie de anuncio para probar el poder de las calculadoras modernas.

GRUPO DE EJERCICIOS 3

1. Encuéntrese, por enmarcación, hasta tres dígitos después del punto decimal:

   a) $\sqrt{3}$ *b*) $\sqrt{6}$.

2. Encuéntrese $\sqrt[3]{2}$ con dos dígitos después del punto decimal.
3. Decídase cuáles de los siguientes tipos de números *no pueden* ser números racionales:
   a) Los recíprocos de números irracionales (Sugerencia: si $1/x = ab$, entonces se tendría que $x = b/a$.)
   b) Las mitades de números irracionales (Sugerencia: si $x/2 = a/b$, entonces se tendría que $x = 2a/b$.)
   c) Los productos de números irracionales por números irracionales.

APROXIMACIONES Y OPERACIONES

Cómo definir operaciones sobre los números reales

Hasta el momento, tenemos un conjunto de números reales denotados por decimales infinitos y una definición de orden en este conjunto. Que-

remos poder hablar de sumas, diferencias, productos y cocientes de números reales. ¿Pero cómo? No podemos ni incluso imaginarnos el proceso de multiplicar dos números denotados por decimales infinitos.

Si los números reales resulta que tienen nombres más cortos como, por ejemplo $\sqrt{2}$, y si *suponemos* que las leyes básicas de la aritmética se aplican también a los números reales, entonces las cosas presentan un mejor aspecto. Supongamos, por ejemplo, que pensamos en las combinaciones de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. ¿Es $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$? ¿Es $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$?

Podríamos primero estudiar estas preguntas sobre números que sabemos son racionales. ¿Es

$$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36}?$$

Sí, ya que

$$\sqrt{4} = 2, \qquad \sqrt{9} = 3, \qquad \sqrt{36} = 6, \quad \text{y} \quad 2 \times 3 = 6.$$

¿Es

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}?$$

¡No!

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 6; \quad \text{y} \quad 5 = \sqrt{25}, \quad \text{no a} \quad \sqrt{13}.$$

Probemos otra vez,

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7,$$

pero

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Por tanto, no parece haber razón alguna para sospechar que $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$, pero sí parece haber buenas razones para creer que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Para tomar una decisión sobre tales cuestiones, debemos volver a la definición de raíz cuadrada:

> *La raíz cuadrada de un número dado es un número cuyo cuadrado es el número dado.*

Si un número real es la raíz cuadrada de 6, entonces el resultado de multiplicarlo por sí mismo será 6; luego debemos tener $\sqrt{6} \times \sqrt{6} = 6$.

Veamos qué sucede a $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})$ cuando lo multiplicamos por sí mismo:

$$(\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}).$$

La ley asociativa nos dice que podemos prescindir de los paréntesis en la multiplicación o arreglarlos a nuestra conveniencia. Si podemos usar esta

ley, podemos prescindir de los paréntesis y escribir lo anterior como sigue:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}.$$

La ley conmutativa nos deja reordenar los factores en un producto. Intercambiemos los términos segundo y tercero:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}.$$

Volvamos ahora a poner los paréntesis de un modo conveniente:

$$(\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}).$$

Pero la definición de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ nos dice que $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ y que $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$, de donde tenemos

$$(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 2 \times 3$$

y

$$2 \times 3 = 6.$$

Así pues $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})$ multiplicado por sí mismo es 6, y $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, si suponemos las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación.

Si efectuamos un cálculo análogo con $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, obtenemos

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{2} + \sqrt{3}) &= (\sqrt{2})^2 + 2 \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 \\ &= 2 + (2 \times \sqrt{6}) + 3 \\ &= 5 + (2 \times \sqrt{6}),\end{aligned}$$

que no es, ciertamente, igual a 5. La expresión $5 + (2 \times \sqrt{6})$ es un *nombre* para un número real, no una instrucción para hacer algo. No podemos proceder más adelante a menos que realmente consigamos una representación decimal para $(2 \times \sqrt{6})$. Formas como $(2 + \sqrt{3})$ y $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$, que son nombres compuestos, se encuentran con frecuencia. Son útiles; dan una idea mucho más precisa de la cantidad nombrada que la que da una representación decimal cualquiera. Las usamos, por tanto, en la forma en que están. Una forma como $(\sqrt{2} \times \sqrt{3})$ es un nombre, también, pero existe un nombre más simple para el mismo número: $\sqrt{6}$. La situación es algo semejante a la de las fracciones $6/8$ y $3/4$. Al tratar con expresiones como $\sqrt{2}$, sin embargo, algunas veces no tenemos ninguna forma que sea claramente la *más sencilla*. Por ejemplo, $\sqrt{1/2}$, $1/\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}/2$ nombran todas, al mismo número real. ¿Cuál de ellas es la más simple?

Después de todo esto podemos preguntar aún: ¿qué es lo que nos da derecho a *suponer* que se cumplen todas las leyes de la aritmética ordinaria? La contestación es que *construimos* definiciones de operaciones de modo que podamos estar seguros que las leyes son válidas.

Cálculo aproximado

En el ejercicio 1 de la página 39, pedíamos valores de $\sqrt{3}$ y $\sqrt{6}$. Aquí está una tabla, en caso de que no se conserve sus respuestas. Incluimos también $\sqrt{2}$ para referencia:

$$\sqrt{2} = 1.414 \ldots .$$

$$\sqrt{3} = 1.732 \ldots .$$

$$\sqrt{6} = 2.449 \ldots .$$

Vamos a tratar de comprobar la afirmación de que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Usaremos un método análogo al esquema de enmarcación usado para calcular raíces. Tómense aproximaciones enmarcantes para $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$:

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5.$$

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8.$$

Si ahora multiplicamos 1.4 por 1.7, ¿estamos seguros de que el resultado será menor que $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$? ¿Es 1.5×1.8 necesariamente mayor que $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$?

Una dificultad para contestar estas preguntas es la de que todavía no hemos definido cuidadosamente $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$.

Un diagrama nos proporcionará una imagen más clara. En la figura 16, $\overline{AB}$ es un segmento de longitud $\sqrt{2}$ unidades, $\overline{AC}$ es de longitud 1.4, y $\overline{AD}$ de longitud 1.5. Análogamente, $\overline{AE}$ es de longitud $\sqrt{3}$ unidades, mientras que $\overline{AF}$ y $\overline{AG}$ son de longitudes 1.7 y 1.8 respectivamente.

Si multiplicamos 1.4 por 1.7, calculamos el área del rectángulo *ACPF*. Si calculamos 1.5×1.8, se calcula el área de *ADRG*. Por $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ entendemos el área de *ABQE*. Es claro que el área del rectángulo *ABQE* debe ser mayor que el área del rectángulo *ACPF* y menor que la del rectángulo *ADRG*.

La región en forma de **L** limitada por *CDRGFPC* puede considerarse como una región de confusión cuya área representa nuestra incertidumbre respecto a cuál sea la contestación exacta.

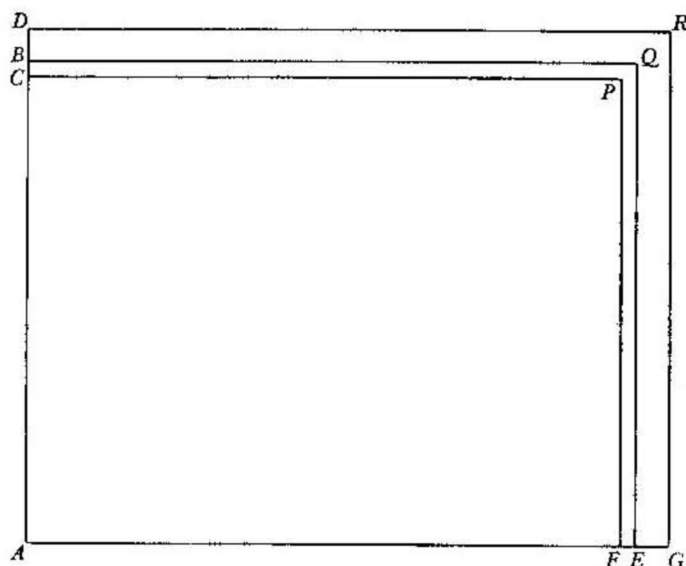


FIGURA 16

Ahora bien, ¿qué pasa si obtenemos mejores aproximaciones? Supongamos que C sube hacia B, y D baja hacia B. Análogamente, supongamos que F va hacia fuera aproximándose a E, y que también G se mueva hacia dentro en dirección a E. Los anchos de las bandas de incertidumbre se contraen; los errores posibles disminuyen. Veamos la tabla I para constatar qué es lo que pasa.

¿Cuál era la respuesta esperada? Veamos ahora de nuevo el valor de $\sqrt{6} = 2.499\ldots$ que calculamos en el ejercicio 1 de la página 39. Todo está sucediendo como esperábamos.

La posición final es que definimos el producto de dos números reales como el número real que resulta del proceso de usar, sin límites, los productos de mejores y mejores aproximaciones a los dos números.

TABLA I

ENMARCACIÓN PARA LA MULTIPLICACIÓN

Demasiado pequeño	Demasiado grande	Diferencia
$1.4 \times 1.7 = 2.38$	$1.5 \times 1.8 = 2.70$	0.32
$1.41 \times 1.73 = 2.4393$	$1.42 \times 1.74 = 2.4708$	0.0315
$1.414 \times 1.732 = 2.449048$	$1.415 \times 1.733 = 2.452195$	0.003147

Que hay esencialmente tal número real y solo uno es intuitivamente claro cuando pensamos en la región en forma de **L** contrayéndose a un par de de segmentos perpendiculares a medida que la incertidumbre decrece sin límite.

Nótese que no tenemos forzosamente que aproximarnos por enmarcación. Siempre que tomemos mejores aproximaciones, obtenemos mejores respuestas.

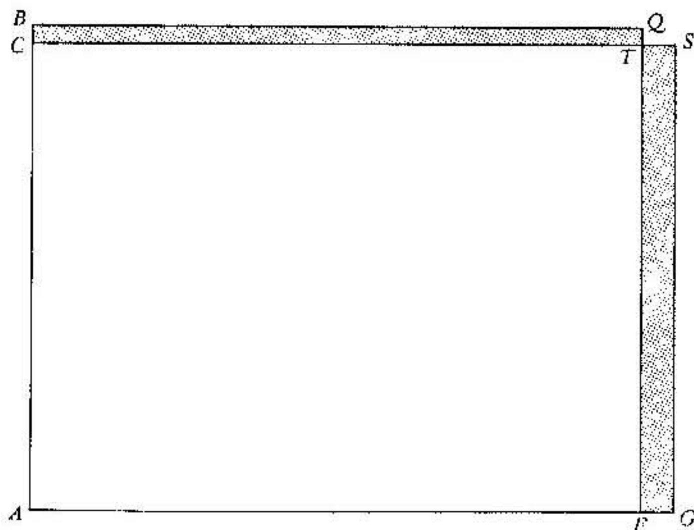


FIGURA 17

Incidentalmente, con frecuencia estamos en posibilidad de mejorar nuestra precisión tomando un factor grande en exceso y el otro demasiado pequeño. Por ejemplo, supóngase que usamos 1.4 y 1.8 como aproximaciones a $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$, respectivamente. El resultado, $1.4 \times 1.8 = 2.52$, está mucho más próximo a la contestación "correcta", 2.449. . ., que 2.38 y 2.70, los productos de 1.4×1.7 y 1.5×1.8, respectivamente.

Podemos mostrar la razón para esta mejora volviendo a dibujar los rectángulos precisamente para este ejemplo (véase la figura 17). Se usarán las mismas letras para designar los segmentos que aparecen en la figura 16; es decir, $\overline{AB}$ es nuestro segmento de $\sqrt{2}$ unidades de longitud, $\overline{AC}$ tiene 1.4 de longitud; $\overline{AE}$, $\sqrt{3}$, y $\overline{AG}$, 1.8. Las nuevas letras, T y S, designan nuevos puntos localizados al extender el segmento CP a través de los segmentos EQ y GR del dibujo original.

El rectángulo "correcto" es *ABQE*. Nuestro producto dio el área de *ACGS*. Esto es demasiado pequeño por el área de la porción sombreada superior, que se encuentra en el interior del rectángulo correcto, pero se omitió, y es demasiado grande por el área sombreada a la derecha, que está fuera del rectángulo exacto y, sin embargo, se incluyó. Por tanto, los errores tienden a neutralizarse.

¿Qué puede decirse respecto la adición? Las ideas son muy semejantes. Si queremos conocer parte del numeral decimal para $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, podemos hacer una tabla de enmarcación. (Véase la tabla II.)

TABLA II

ENMARCACIÓN PARA LA ADICIÓN

Demasiado pequeño	Demasiado grande	Diferencia
1.4 + 1.7 = 3.1	1.5 + 1.8 = 3.3	0.2
1.41 + 1.73 = 3.14	1.42 + 1.74 = 3.16	0.02
1.414 + 1.732 = 3.146	1.415 + 1.733 = 3.148	0.002

La misma idea funciona, pero se puede observar en las tablas que para la adición la incertidumbre comparativa —la diferencia— en cada paso es más bien menor que para la multiplicación.

¿Y qué puede decirse de la sustracción? ¡Cuidado! La tabla de enmarcación debe hacerse de un modo diferente. Usemos, como ejemplo, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Si queremos que nos resulte una aproximación que sea indudablemente menor que la contestación correcta, restamos una aproximación demasiado grande de $\sqrt{2}$ de una aproximación demasiado pequeña de $\sqrt{3}$. (¿Por qué?) Para obtener un resultado que sea indudablemente más grande que la contestación correcta, restamos una aproximación demasiado pequeña del mayor de nuestros números, $\sqrt{3}$, de una aproximación demasiado grande de $\sqrt{2}$. (Véase la tabla III.)

Para la división, la situación es análoga a la de la sustracción. Para obtener un resultado del que podamos estar seguros es demasiado pequeño, debemos dividir una aproximación que es demasiado pequeña para el dividendo por una que sea demasiado grande para el divisor. (Cuanto mayor el divisor, menor el resultado.)

Hasta el momento, todos nuestros ejemplos y todos nuestros cálculos ilustrativos se han hecho con números reales positivos. ¿Qué puede decirse de las operaciones en que aparecen números negativos? Ningún problema

TABLA III

ENMARCACIÓN PARA LA SUSTRACCIÓN

Aproximaciones para contestaciones demasiado pequeñas			Resultado	Aproximaciones para contestaciones demasiado grandes			Resultado	Diferencia
Más pequeño que $\sqrt{3}$		Más grande que $\sqrt{2}$		Más grande que $\sqrt{3}$		Más pequeño que $\sqrt{2}$		
1.7	$-$	1.5	= 0.2	1.8	$-$	1.4	= 0.4	0.2
1.73	$-$	1.42	= 0.31	1.74	$-$	1.41	= 0.33	0.02
1.732	$-$	1.415	= 0.317	1.733	$-$	1.414	= 0.319	0.002

se presenta que no se haya presentado ya en la definición de las operaciones con números racionales negativos. (Véase el cuaderno 10: *El sistema de los números racionales.*) Las definiciones de las operaciones se dan en términos de las mismas operaciones sobre los números racionales, y simplemente seguimos aquellas mismas reglas. Por ejemplo, si queremos calcular $\sqrt{2} \times {}^{-}\sqrt{3}$, el valor es ${}^{-}\sqrt{6}$ porque la regla $a \times {}^{-}b = {}^{-}(a \times b)$ de los números racionales también se aplica en el sistema extendido.

Cualquiera que sea la operación que estamos tratando de efectuar, el resultado básico siempre es que *si nos aproximamos suficientemente a los operandos —los números reales originales—, entonces obtendremos un resultado tan próximo a un número real fijo como deseemos. El número real hacia el que de esa forma nos aproximamos se define como el resultado de la operación.*

Como todas las operaciones sobre números reales están definidas en términos de las operaciones sobre los números racionales y coinciden, con una aproximación que puede ser tan grande como deseemos, con las correspondientes operaciones racionales, las propiedades algebraicas básicas del sistema de los números racionales se traspasan, ciertamente, al sistema de los números reales. Resumiremos, por comodidad, toda la estructura enumerando cada una de sus propiedades esenciales.

Antes de hacerlo, recordemos ciertas propiedades de inclusión básicas que son características de los sistemas construidos en matemáticas. Los enteros están incluidos en los números reales. En el curso de nuestra construcción, el entero al que por lo común llamamos 2 obtuvo como nuevo nombre, bastante inmanejable, el de 2.0000. . ., pero ya ahora nos vamos a sentir en libertad de simplificar tanto este como otros decimales molestos de modo que nuestros decimales con terminación terminen realmente.

He aquí una proposición más general:

INCLUSIÓN DE SISTEMAS

{Números naturales} ⊂ {números plenos} ⊂ {enteros}

⊂ {números racionales} ⊂ {números reales}

CERRADURA

Adición: la suma de dos números reales cualesquiera es un número real único.
Sustracción: La diferencia de dos números reales cualesquiera es un número real único.
Multiplicación: el producto de dos números reales cualesquiera es un número real único.
División: el cociente de dos números reales cualesquiera, cuando el divisor no es cero, es un número real único.

CONMUTATIVIDAD

Adición: si a y b son números reales, entonces $a + b = b + .a$.
Multiplicación: si a y b son números reales, entonces $a \times b = b \times a$.

ASOCIATIVIDAD

Adición: si a, b y c son números reales, entonces $(a + b) + c = a + (b + a)$.
Multiplicación: si a, b y c son números reales, entonces $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

IDENTIDADES

Adición: hay un número real, 0, tal que si a es un número real, entonces $a + 0 = 0 + a = a$.
Multiplicación: hay un número real, 1, tal que si a es un número real entonces $a \times 1 = 1 \times a = a$.

INVERSOS

Adición: si a es un número real, entonces hay un número real ^-a tal que $a + {^-a} = 0$.
Multiplicación: si a es un número real distinto de cero, entonces hay un número real $1/a$ tal que $a \times 1/a = 1$.

ORDEN

Tricotomía: si a es un número real y b es un número real, entonces $a = b$, o $a < b$, o $b < a$, y solamente una de estas relaciones se verifica.
Adición: si a y b son números reales tales que $a < b$, y c es un número real cualquiera, entonces $a + c < b + c$.
Multiplicación: si a y b son números reales tales que $a < b$, y c es un número real tal que $c > 0$, entonces $ac < bc$.

DENSIDAD

Si a y b son números reales tales que $a < b$, entonces hay un número real c tal que $a < c < b$. (En realidad, puede elegirse siempre c de forma que sea racional.)

COMPLECIÓN

A cada punto de la recta numérica corresponde un número real, y a cada número real corresponde un punto de la recta numérica.

Es la propiedad últimamente citada —la propiedad de compleción la que *realmente* distingue el sistema de los números reales del sistema de los números racionales.

GRUPO DE EJERCICIOS 4

1. En un parque urbano, las veredas estaban arregladas como sigue: un cuadrado de 100 yardas por lado está rodeado de una senda circular que lo cirscunscribe. Nótese que se necesita andar 400 yardas para dar

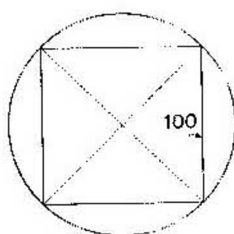


FIGURA 18

vuelta al parque siguiendo los lados del cuadrado. Surgió la pregunta de que cuánto más camino habría que recorrer para dar la vuelta al parque por el círculo. ¿Es la senda circular mayor o menor que un cuarto de milla (1 milla = 1760 yardas)? Nótese que su diámetro es $100 \times \sqrt{2}$ yardas.

2.*a*) Tómese cada uno de los sistemas mencionados en la página 46 y la lista de leyes de las páginas 46 y 47, y compruébese cada una de ellas para ver cuántas leyes no son satisfechas cuando las palabras "número real" se reemplazan siempre que aparezcan por "número natural". Por ejemplo, los números naturales no satisfacen la propiedad de existencia de identidad para la adición, porque el enunciado diría: "hay un número natural, 0, tal que si a es un número natural, entonces $a + 0 = 0 + a = a$". Pero 0 es no es un número natural.

Préstese particular atención a la cerradura para la sustracción y la división, a la existencia de inverso para la adición y la multiplicación, a la densidad y a la compleción.

b) Repítase el ejercicio 2*a*, reemplazando las palabras "número real" por las palabras "número pleno".

c) Repítase el ejercicio 2*a*, reemplazando las palabras "número real" por la palabra "entero".

d) Repítase el ejercicio 2*a*, reemplazando las palabras "número real" por las palabras "número pleno".

¿CUÁNTOS?

Hemos visto que un número racional es, en esencia, un tipo muy particular de número real. En esta sección vamos a procurar contestar, al menos en parte, la cuestión "¿qué tan especial?". Nuestra dificultad va a radidar en la vaguedad que, en general, envuelve a todos estos problemas cuando tratamos de conjuntos infinitos.

Es fácil comprobar que la mitad de los cuadros de un tablero de ajedrez son negros. Se puede comprobar contándolos, y cualquiera que sea la forma en que se cuenten, si no es equivocada, nos dirá que hay 32 cuadros negros y un total de 64 cuadros. Contar, como el lector recordará, es el proceso mediante el cual ponemos un conjunto en correspondencia uno a uno con un conjunto de números naturales ordenados, en donde el último conjunto debe tener la propiedad de que si contiene un número natural cualquiera debe contener también a todos los números naturales que le preceden. Es decir, no se nos permite contar saltándonos números o escogiéndolos al azar (como, por ejemplo, en "2, 7, 4, 11"); debemos contar en orden y sin saltos, "1, 2, 3, 4". Entonces, el último número natural que se usa se llama "número cardinal" del conjunto contado o, simplemente, el número de cosas en el conjunto.

Ahora bien, ¿qué es lo que sucede si no se llega nunca a un último número natural en el proceso de contar? En este caso —si es que el conjunto consta de algún miembro— decimos que el conjunto es "infinito". Con los conjuntos infinitos, los problemas se presentan de inmediato. Piénsese en esta afirmación aparentemente del todo razonable: "la mitad de los números naturales son pares". Supongamos que alguien arguye al respecto. Se procede a "contar" todos los números naturales y luego todos los pares, pero necesitamos todos los números naturales para contar solo los pares.

$$\begin{array}{rccccc} \text{Números pares:} & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{Números naturales:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \end{array}$$

Parece, pues, que ¡hay exactamente tantos números naturales pares como números naturales!

El lector puede, desde luego, mantener su afirmación original, por ejemplo en la siguiente forma: "Supongamos que tomo los números naturales hasta un número grande; luego, según en donde me haya detenido, o bien exactamente la mitad o bien la mitad exactamente uno menos del número en que me he detenido, está constituida por números pares. En cualquiera de los casos, la *proporción* de los pares es muy próxima a un medio y difiere de un medio en tan poco como desee. Por ejemplo, me detengo en 1 000 000, la proporción es exactamente un medio; me detengo en 1 000 001, la proporción es $\frac{500\,000}{1\,000\,001}$, que es igual a 0.4999995...".

En el caso de los números naturales pares, vimos un subconjunto que podía ponerse en una correspondencia uno a uno con el conjunto total de los números naturales. No deberá, pues, sorprendernos descubrir que los números naturales pueden usarse para contar conjuntos que contienen a los números naturales como subconjuntos propios.

Por ejemplo, pensemos en el conjunto de todos los números naturales y en todas las mitades de los números naturales:

$$H = \{\tfrac{1}{2}, 1, 1\tfrac{1}{2}, 2, 2\tfrac{1}{2}, 3, 3\tfrac{1}{2}, 4, \ldots\}.$$

Escríbanse todos los elementos con el denominador 2:

$$H = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{4}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{6}{2}, \tfrac{7}{2}, \tfrac{8}{2}, \ldots\}.$$

Hagamos ahora la correspondencia con los numeradores:

$$\begin{array}{rccccc} H: & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \text{Números naturales:} & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \end{array}$$

Todo elemento de H está contado.

Un problema un poquito más difícil es el de contar todos los enteros:

$$I = \{\ldots, {}^-3, {}^-2, {}^-1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Se puede hacer una correspondencia como la de la figura 19. Aquí los números naturales pares están contando a los enteros positivos, y los números naturales impares cuentan al cero y a los enteros negativos.

Es tiempo de que recordemos lo que se entiende por "contar" un conjunto. Simplemente, estamos estableciendo una correspondencia uno a uno entre el conjunto dado y un conjunto de números naturales que comienza con el 1 y no se salta ningún número natural. Entonces, si hay un número

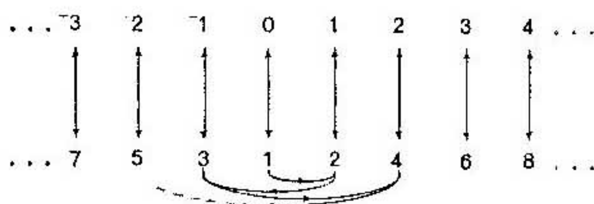


FIGURA 19

natural que es el último que se emplea, ese es el número cardinal del conjunto. Cuando, como ocurre en los casos que hemos mostrado, todo elemento del conjunto tiene un número natural pero no existe un natural que sea el último usado, se dice que la cardinalidad del conjunto es alef-cero ($\aleph_0$), un nombre dado por Jorge Cantor hace ya aproximadamente un siglo. A pesar de las dificultades de escritura e impresión, el nombre ha subsistido.

Hasta el momento, hemos mostrado los siguientes conjuntos de cardinalidad alef-cero:

{Los números naturales}
{Los números enteros pares}
{Las mitades de los números naturales}
{Los enteros}

Invitamos al lector a señalar —y contar— otros conjuntos tales. He aquí algunos para que se practique su conteo:

1. El conjunto de los números naturales mayores que 5, es decir, {6, 7, 8,...}.
2. El conjunto de los números naturales cuyos últimos tres dígitos son 573, es decir, {573, 1573, 2573, ... }.
3. El conjunto de los enteros no divisibles por 3.
4. El conjunto de las fracciones en su forma más simple cuyos denominadores son 1, 2, 3, o 6.

Surge ahora un problema. ¿Puede contarse *todo* conjunto no vacío? Obviamente, por su propia definición, un conjunto finito puede contarse, porque la propiedad de ser finito y no vacío simplemente consiste en tener un conjunto contante con último número. Por tanto, lo que realmente queremos saber es esto: "¿Puede contarse todo conjunto infinito?" En nuestra nueva terminología preguntamos: "¿tiene todo conjunto finito la cardinalidad alef-cero; o hay conjuntos más grandes que no pueden cubrirse con los números naturales, no importa lo inteligentes que seamos?"

Nótese que algunas veces, ciertamente, tenemos que ser listos. Hay, por ejemplo, muchas formas anárquicas de usar todos los números naturales sin que se cuenten todos los enteros, por ejemplo, si tuviésemos cuidado, podríamos usar el conjunto en su totalidad solo para los enteros positivos pares. Es necesaria cierta astucia para decidir escoger los positivos y los negativos más o menos simultáneamente.

¿Y qué hay acerca del conjunto de los números racionales? Parece que este es un conjunto mucho mayor que los que hasta el momento hemos intentado contar. Ningún recurso que se aproxime en simplicidad a los que hasta ahora hemos usado trabajará en esta ocasión. ¡Recuérdese que el conjunto de puntos que representan a los números racionales es denso sobre la recta numérica!

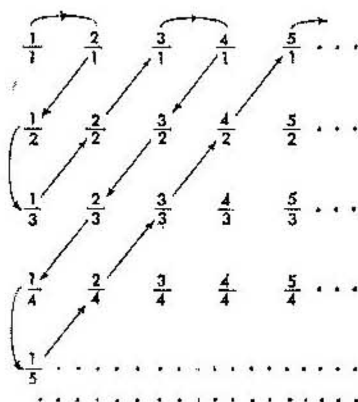


FIGURA 20

Escribamos fracciones para los números racionales positivos en una tabla pensada como infinita en dos direcciones. En el primer renglón, escribimos aquellos cuyo denominador es 1; en el segundo, aquellos cuyo denominador es 2, y así sucesivamente. En la primera columna están todas las fracciones con denominador 1; en la segunda columna están todas las de numerador 2; y así sucesivamente. (Véase la figura 20.)
Los renglones son infinitos y las columnas son infinitas, pero las diagonales de abajo arriba y de izquierda a derecha son *finitas*. Síganse las flechas y numérense las fracciones sobre la marcha. Numeramos primero 1/1 con 1; esta es la única fracción cuyo numerador y denominador suman juntos 2. Numérense ahora las fracciones —dos de ellas— cuyo numerador y denominador suman 3; a continuación las tres fracciones en que la suma es 4, y así sucesivamente.

$$\begin{array}{cccccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \cdots \end{array}$$

¿Obtiene así toda fracción un número natural? ¡Sí! Con solo que sumemos el numerador y el denominador de una fracción, sabemos en qué diagonal se encuentra. Además, como hay solamente un número finito de fracciones en cada diagonal —una menos que la suma del numerador y el denominador para esa diagonal—, solamente habremos empleado un número finito de números naturales antes de llegar allí. Y un número finito de números finitos es finito. Piense el lector en este argumento hasta que se asegure de estar plenamente convencido.

En realidad, con un poquito de álgebra, podemos hacer una aproximación burda del número natural que le tocará a la fracción dada.

Hemos mencionado que primero contábamos una fracción en la primera diagonal; luego dos en la siguiente; tres en la otra; luego cuatro y así sucesivamente. Cada diagonal tiene una fracción más que la que le precede. Ahora bien, ¿cuántas tendrán en conjunto cuando acabemos cada diagonal? Había una después de la primera diagonal; había tres después de la segunda (añadimos dos), seis después de la tercera (añadimos tres), diez después de la cuarta, y así sucesivamente. (Véase la tabla IV.)

TABLA IV

Suma de numeradores y denominadores	Fracciones con esta suma particular	Fracciones con esta suma menor
2	1	1
3	2	3 = 1 + 2
4	3	6 = 3 + 3
5	4	10 = 6 + 4
6	5	15 = 10 + 5

Supóngase ahora que consideramos la siguiente fórmula: Tómese un medio de la suma del numerador y del denominador multiplicado por uno menos que esta suma; es decir,

$$\frac{\text{Suma} \times (\text{Suma} - 1)}{2}$$

Para una suma de 2: $\frac{2 \times 1}{2} = 1.$

Para una suma de 3: $\frac{3 \times 2}{2} = 3.$

Para una suma de 4: $\frac{4 \times 3}{2} = 6.$

Para una suma de 5: $\frac{5 \times 4}{2} = 10.$

Para una suma de 6: $\frac{6 \times 5}{2} = 15.$

Aplicando la fórmula para cada suma obtenemos los números de la tercera columna de la tabla IV. No probaremos aquí esta fórmula, pero el lector puede comprobarla hasta que quede razonablemente convencido de su validez.

¿Cuál es el número que cuenta a la fracción 1/5? Es la primera fracción en la diagonal en que la suma es $1 + 5 = 6$. ¿Cuántas fracciones tienen menores sumas? Veamos, en la tabla IV, la cuarta línea de la tercera columna, la opuesta al "5" de la primera columna, o calcúlese $(5 \times 4)/2 = 10$. Luego, para cada una de diez fracciones, la suma del numerador y el denominador era menor o igual que 5. Luego 1/5 es la décimoprimera fracción que contamos, es decir $1/5 \leftrightarrow 11$.

¿Cuál será el número natural que se corresponderá con 7/9? La suma del numerador y el denominador es igual a 16. Nos toma $(15 \times 14)/2 = 210/2$, es decir, 105 números para acabar con aquellos que suman 15. Para completar los que suman 16 emplearemos $(16 \times 15)/2 = 240/2 = 120$ números. Luego el número correspondiente será uno de los que están entre 106 y 120, ambos inclusive.

Podemos afinar más; nuestras flechas van hacia arriba cuando los totales son pares y hacia abajo cuando son impares. (Véase el diagrama; nótense las flechas para los totales 2, 3, 4, 5 y 6.) Nuestro total es 16, y 7/9 es la séptima fracción numerada en esta diagonal. (¿Por qué?) A la primera fracción se le adjudicó el número 106; a la segunda, el 107; luego a la séptima le deberemos adjudicar el 112. Si el lector no lo cree, termine el diagrama con quince diagonales y cuente él mismo; luego vuelva a leer el argumento matemático.

En cualquier caso, lo que es verdad es que toda fracción queda numerada. El lector puede quejarse de que comenzamos hablando de numerar *números racionales* y terminamos contando *fracciones*. Hemos dado a 1/1 un número diferente al de 2/2 y al de 3/3,··· . A cada número racional le hemos asignado un número infinito de números naturales diferentes. ¿No podemos arreglar esta situación? ¡Claro que sí! Basta con dejar de lado en cada renglón cualquier fracción que sea equivalente a una fracción de

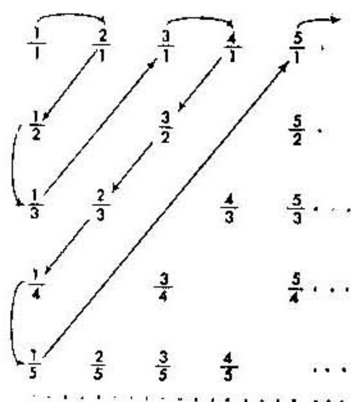


FIGURA 21

un renglón anterior, pero conservando la disposición de las fracciones en la forma que se muestra en la figura 21.

Ahora, numeremos de nuevo:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \cdots \end{array}$$

Algunas de nuestras diagonales quizá tengan solo unos cuantos elementos; pero esto solo se traduce en un ahorro de tiempo y números naturales. Desde luego, las fórmulas ya no siguen trabajando; pero todavía nos dan un *máximo*. Sabemos que un número racional habrá recibido un número en o antes que el número primitivo de cualquiera de sus fracciones equivalentes.

¿Y qué hay respecto a todos los racionales, o todas las fracciones positivas, negativas y el cero? Podemos hacer un dispositivo, como el de la figura 22, que nos dará un procedimiento de conteo. Las flechas dan vueltas en espiral, comenzando en 0/1.

Probablemente el lector ya se habrá formulado la pregunta que sigue: ¿que pasa con los números reales? En 1874, Jorge Cantor probó que *no pueden* contarse. No hay modo alguno de estirar los naturales hasta ese punto.

Antes de que comencemos con la prueba real, quizá sea conveniente discutir un poco sobre lo que se entiende por imposibilidad matemática. Demasiado a menudo un enunciado en el cual en términos matemáticos se dice que una cosa u otra es imposible se entiende como si quisiera decir

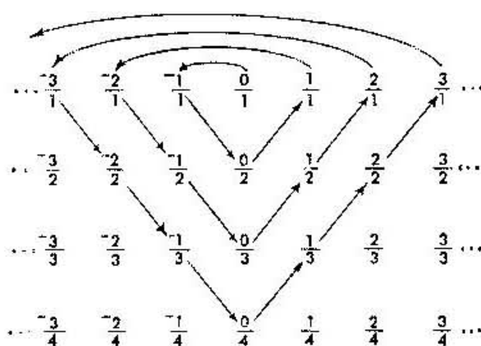


FIGURA 22

"yo no lo puedo hacer" o "nadie lo ha hecho aún". Esta falsa interpretación ha causado un desperdicio de tiempo, tanto a gentes que no lo habían entendido e intentaban hacer lo imposible, como a gente que tenía que encontrar los errores inevitables que resultaban de estos intentos.

Prácticamente todo enunciado matemático puede convertirse en una afirmación de imposibilidad. Incluso "$2 + 2 = 4$" puede formularse como "es imposible, bajo las reglas habituales de la aritmética y la notación numérica, que la suma de dos y dos difiera de cuatro".

La proposición "es imposible dar una construcción de regla y compás para la trisección de un ángulo arbitrario" esencialmente no difiere de los anteriores enunciados. Podría expresarse positivamente: "para efectuar una construcción que triseque ángulos arbitrarios son necesarios otros instrumentos aparte de la regla y el compás".

Nuestra situación es análoga. Debemos mostrar que nadie, independientemente de cuál sea su genio o su habilidad, puede conseguir poner el conjunto de los números reales en correspondencia uno a uno con los números naturales. Suponer tal correspondencia es una contradicción lógica.

La forma en que vamos a demostrar esto es la de suponer que alguien pretende haber hecho la correspondencia y se nos presenta con el resultado. Entonces miraremos a su lista y señalaremos un número real que no está en ella. Lo cierto será que el número de números reales que no se encuentre en la lista será infinito, pero solo necesitamos señalar *uno* para demostrar lo falso de su pretensión. Es importante hacer notar que nuestro método funcionará no importa cuantas veces nuestro amigo vuelva con su lista a su cuarto de estudio. En teoría, podemos siempre echar una ojeada a cualquier lista que construya y escribir abajo un número real que no aparece en ella.

Trabajaremos siempre con los números reales mayores que cero y menores que uno y mostraremos que ni éstos pueden contarse. Representaremos estos números, por ser conveniente para la discusión, por decimales infinitos sin el 0 habitual a la izquierda del punto decimal. Algunos ejemplos son

.1000000000 ⋯ ,
.1010010001 ⋯ ,
.1212121212 ⋯ .

Imaginémonos ahora una correspondencia como esta:

Números naturales	Decimales infinitos
1 ↔	.______________________ ⋯
2 ↔	.______________________ ⋯
3 ↔	.______________________ ⋯
⋯⋯⋯	⋯⋯⋯

donde sobre cada guioncito está un dígito y la tabla consiste en decimales infinitos y se extiende indefinidamente hacia abajo.

Especificamos del siguiente modo un decimal infinito *A* que *no* está en la lista: veamos el primer dígito del primer numeral de la lista. Si no es 5, entonces el primer dígito de *A* será 5; si el primer dígito del primer numeral es 5, entonces el primer dígito de *A* será 4. Así pues, *A* comienza con .4 ó .5; y estamos seguros de que cualquiera que vaya a ser *A*, no será el primer numeral de la tabla, puesto que comienza en forma diferente.

Veamos a continuación el segundo dígito del segundo numeral —el que corresponde a 2. Si el dígito no es 5, hagamos el segundo dígito de *A* igual a 5; si es 5, usemos 4 como segundo dígito de *A*. Así pues, *A* comienza de una de estas cuatro formas: .55, .54, .45, ó .44. Sabemos ahora que *A* no será igual ni al primero ni al segundo numeral de la tabla.

Prosigamos. Vemos al tercer dígito del tercer numeral y escogemos 4 ó 5 como tercer dígito para *A*, exactamente como antes. Con ello garantizamos que *A* es diferente del primero, del segundo y del tercer numeral.

Continuemos. Si la lista realmente comenzó

1 ↔ .14372956 . . .
2 ↔ .35219784 . . .
3 ↔ .71985132 . .
4 ↔ .31296540 . . .
5 ↔ .12000000 . . .
6 ↔ .90763841 . . .
7 ↔ .13204152 . . .
8 ↔ .55555555 . . .,

entonces A comenzaría así:

$$.54555544\ldots$$

a causa de los valores sucesivos de los dígitos subrayados.

Continúese este proceso y piénsese sobre el resultado. A es un decimal infinito, y no es *ninguno* de los decimales de la lista porque difiere de *cada* miembro de la misma. Luego no está de ningún modo en la lista.

No hay nada especial acerca de nuestra regla de escoger 4 ó 5. Cualquier regla funcionaría en tanto que garantizase que A es diferente de cada miembro de la lista y que A no es igual a 0 ni termina en una infinidad de nueves, puesto que ambas elecciones están prohibidas. (Usamos solamente reales positivos en nuestra lista, y anteriormente en este cuaderno especificamos que aquellos decimales que terminaban en una sucesión indefinida de nueves no eran aceptables.) Otro sistema perfectamente aceptable sería el de trabajar con los números 1 y 7, en lugar de con 4 y 5. Ensaye el lector sus propias reglas escogiendo su propio par de números.

Esta demostración ha sido llamada "prueba diagonal" porque vamos recorriendo la diagonal de la tabla de izquierda a derecha para construir A, dígito tras dígito, cambiando los dígitos de esta diagonal.

¿Qué es lo que ahora sabemos? Hemos visto, mediante una demostración convincente, que hay más números reales que racionales. Los números naturales podían estirarse hasta contar los números racionales, pero no pueden contar los números reales. El número cardinal de los reales, es decir, el número que está asociado con cada uno de los conjuntos que *pueden* ponerse en correspondencia uno a uno con estos reales, se llama C. ¿Es C el máximo cardinal? No. Se puede mostrar que no hay ningún límite a la cardinalidad de los conjuntos que pueden construirse, pero la prueba es demasiado larga y complicada para que la demos aquí.

GRUPO DE EJERCICIOS 5

1. Supongamos que la correspondencia comenzó:

$$1 \leftrightarrow .12345678\ldots$$
$$2 \leftrightarrow .11111111\ldots$$
$$3 \leftrightarrow .55544444\ldots$$
$$4 \leftrightarrow .55455555\ldots$$
$$5 \leftrightarrow .10000000\ldots$$
$$6 \leftrightarrow .01010101\ldots$$

¿Cuál sería la forma en que A comenzaría en sus seis primeros dígitos si siguiéramos la regla que primero dimos para construirlo?

2. Dado: $A = .554544\ldots$.
Proporciónense los primeros seis dígitos decimales de seis decimales infinitos diferentes en cual el primer miembro difiera de A solamente en su primer dígito, el segundo miembro difiera de A solamente en su segundo dígito, y así sucesivamente.

RESUMEN

El sistema de los números reales se ha construido para remediar un defecto: el carácter incompleto del sistema de los números racionales; el hecho de que haya razones de longitudes de segmentos que no pueden evaluarse en términos de razones de números plenos.

Hemos representado a los números reales por numerales decimales infinitos, y hemos visto cuáles de estos numerales corresponden a los números racionales como un subconjunto de los números reales.

Las operaciones correspondientes a las operaciones aritméticas sobre los números racionales se han definido también para los números reales, y se han dado métodos para hacer cálculos, tan aproximados como se desee, con los números reales.

Finalmente, hemos visto que la extensión del sistema de los números racionales al sistema de los números reales representa, ciertamente, una extensión muy grande. En realidad, requiere un orden de infinitud completamente nuevo, un nuevo número cardinal infinito.

Para lectura posterior

Entre los varios libros interesantes que tratan del tema que aquí presentamos, uno es *Numbers: Rational and Irrational*, de Ivan Morton Niven ("New Mathematical Library", Vol. I [Nueva York y Toronto: Random House, 1961]). Este libro de 136 páginas se puede adquirir en ediciones en tela o rústica, en Random House, Inc., 501 Madison Avenue, Nueva York, Nueva York 10022.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

Grupo de ejercicios 1 (pág. 26)

1. *a*) 0.999 *b*) $^{-}0.999$

2. $^{-}0.202400\ldots$ (o $^{-}0.20135\ldots$, $^{-}0.20200\ldots$, etc.)

3. $^{-}100.0\ldots$, $^{-}4.2310\ldots$, $^{-}0.1234\ldots$, $^{-}0.01234\ldots$, $1.234\ldots$, $12.345\ldots$

4. *a*) $0.21000\ldots$ *b*) $^{-}1.13000\ldots$ *c*) $2.135000\ldots$

Grupo de ejercicios 2 (pág. 33)

1. *a*) $0.\overline{153846}$ *b*) $0.\overline{135}$ *c*) $0.\overline{4857142}$ *d*) $0.\overline{307692}$

2. *a*) $\frac{20}{99}$ *b*) $\frac{68}{55}$ *c*) $\frac{5}{13}$ *d*) $\frac{4115}{33333}$

3. $0.\overline{142857}$, $0.2857\overline{142857}$, $0.42857\overline{142857}$, $0.57\overline{142857}$, $0.7\overline{142857}$. $0.857\overline{142857}$

4. $x = 0.\overline{9}$, $10x = 9.\overline{9}$. Réstese $9x = 9$, $x = 1$.

Grupo de ejercicios 3 (pág. 39)

1. *a*) 1.732 (Pruébese a elevar al cuadrado 1.732 y 1.733.) *b*) 2.449

2. 1.25 (Nótese que $1.25 \times 1.25 \times 1.25 = 1.953125$;
$1.26 \times 1.26 \times 1.26 = 2.000376$.)

3. Los tipos de números nombrados en los ejercicios 3*a* y 3*b* no pueden ser números racionales. Pero $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, luego los productos de números irracionales *pueden* ser números racionales.

Grupo de ejercicios 4 (pág. 48)

1. La senda circular tiene una longitud superior a las 444 yardas, ya que

$$100\sqrt{2} > 141.4 \quad \text{y} \quad \pi > 3.14.$$

2. *a*) Leyes que no se satisfacen cuando no se sustituyen por "número natural":

cerradura para la sustracción
cerradura para la división
identidad aditiva
inverso aditivo
inverso multiplicativo
densidad
compleción

b) Las mismas que en el ejercicio 2*a*, excepto la de la identidad aditiva.

c) Las mismas que en el ejercicio 2*b*, excepto la del inverso aditivo.

d) Compleción.

Grupo de ejercicios 5 (pág. 58)

1. .554455 ...

2. Hay muchas respuestas correctas. He aquí una:

$1 \leftrightarrow .454544 \ldots$
$2 \leftrightarrow .544544 \ldots$
$3 \leftrightarrow .555544 \ldots$
$4 \leftrightarrow .554444 \ldots$
$5 \leftrightarrow .554554 \ldots$
$6 \leftrightarrow .554545 \ldots$

Esta obra terminó de imprimirse el día 21 de septiembre de 1970, en los talleres de Programex Editora, S. A., Comonfort 58-6, México, D. F.

Se tiraron 8 000 ejemplares

en su cátedra, como a los alumnos en su aprendizaje.

Títulos que componen esta colección:

1. Conjuntos
2. Números enteros
3. Sistemas de numeración para los números enteros
4. Algoritmos de las operaciones con números enteros
5. Números y sus factores
6. Números racionales
7. Sistemas de numeración para los números racionales
8. Proposiciones numéricas
9. El sistema de los enteros
10. El sistema de los números racionales
11. El sistema de los números reales
12. Lógica
13. Gráficas, relaciones y funciones
14. Geometría informal
15. Medida
16. Recopilación, organización e interpretación de datos
17. Sugerencias para resolver problemas
18. Simetría, congruencia y semejanza

OTRO TÍTULO

Cómo plantear y resolver problemas

G. Polya

Dirigido a los maestros y estudiantes de matemáticas.

Es sumamente interesante porque, además del aspecto nuevo que presenta de las matemáticas, su proceso de invención, como ciencia experimental e inductiva, proporcionando no la solución estereotipada de los problemas, sino los procedimientos originales de cómo se llegó a su solución, da los caminos para resolver problemas en cuanto tales y dispone los elementos del pensamiento de tal manera que instintivamente actúen cuando se presente un problema por resolver.